



Les objectifs : Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente. Combinaison linéaire de séries convergentes.

Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs.

Convergence et somme de la série géométrique et de ses dérivées.

Convergence et somme de la série exponentielle.

Convergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.

Convergence absolue.

Exercice 1 ♥ : Travailler avec les séries de référence

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries :

$$\begin{array}{llll} a) \sum_{n \geq 0} (n+1)3^{-n}; & b) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 3n}{2^n}; & c) \sum_{n \geq 2} \frac{(-1)^n}{n!}; & d) \sum_{n \geq 1} \ln(n) \\ e) \sum_{n \geq 0} \frac{2^{n+1}}{3^n n!}; & f) \sum_{n \geq 1} \frac{2n}{(\sqrt{2})^n}; & g) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2 + 2^n}{n!}; & h) \sum_{n \geq 1} \frac{2^n}{n^3} \end{array}$$

Exercice 2 ★ : Reconnaître les séries télescopiques

Déterminer la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{n}{(n+1)!}; \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{1+2+\dots+n}{1+2^3+\dots+n^3}; \quad c) \sum_{n \geq 2} \ln \left(1 - \frac{1}{n^2} \right); \quad d) \sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{\sqrt{n-1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}} \right)$$

Exercice 3 ★ : Appliquer le théorème de comparaison

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$a) \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n \cos^2(n)}; \quad b) \sum_{n \geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n \ln(n^2+1)}; \quad c) \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(\pi\sqrt{n})}{n^2}; \quad d) \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n + \frac{1}{2^n}}$$

Exercice 4 ** : Équivalences et théorème de comparaison

Montrer la convergence de $\sum \ln \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ et la divergence de $\sum \ln \left(\frac{2 + \sin(1/n)}{2 - \sin(1/n)}\right)$.

Exercice 5 ♥ :

On considère la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et } u_{n+1} = u_n \cdot \exp(-u_n), \forall n \in \mathbb{N}$$

① Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

② Étudier la nature de la série $\sum u_n$.

Exercice 6 ♥ :

Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ définie par $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u et v deux suites respectivement définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

② Conclure que la série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge. On notera par la suite S sa limite.

③ En notant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k} = \int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $S = \ln(2)$

④ En distinguant selon la parité de n , montrer que $|S - S_n| \leq \frac{1}{n+1}$. En déduire un moyen d'obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près de $\ln(2)$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ** :

Soit un entier naturel k non nul fixé. Pour tout entier n on définit :

$$I_n = (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{k(n+1)}}{1+x^k} dx ; J = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^k} \text{ et } u_n = \frac{(-1)^n}{kn+1}$$

① Déterminer $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$. Calculer $J - I_n$.

② Montrer que la série $\sum u_n$ converge. Calculer sa somme pour $k = 1$ et $k = 2$.