

1

T.D.1 Suites numériques

Remarque

Classement des exercices

Une ★ signale une application directe des formules du cours ;

Les exercices marqués d'un ♥ indiquent des exercices classiques dont il faut connaître les techniques ;

Enfin les ★★ à ★★★ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou de l'agro.



Les objectifs : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2. L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n -ième terme. Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone. Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes. Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$. Croissances comparées : $a^n = o(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = o(a^n)$ (avec $\alpha > 0$) Suites équivalentes.

Exercice 1 ★ :

- ① Étudier la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$ pour $n \geq 1$.
Valider votre réponse grâce à un programme Python.
- ② Même question pour la suite (v_n) définie par $v_n = \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ pour $n \geq 0$.

Exercice 2 ★ :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 1}$.

Montrer que la suite (u_n^2) est arithmétique et en déduire $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$.

Exercice 3 ★ : Les suites usuelles

- ① Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par leur premier terme et une relation de récurrence. On indiquera leur nature :
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n/3, v_1 = 2$;
 $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n - 1, u_0 = -10$
 $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 3v_n^2$ et $v_0 = 1$ (✍ Un opération préalable est nécessaire...)

- ② Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, nu_n + u_{n-1} - \frac{2}{(n-1)!} = 0$
- Étudier la nature de la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout entier n par $v_n = n!u_n$.
 - En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - En déduire que la suite (u_n) converge et donner sa limite.
 - Écrire un programme Python qui détermine le plus petit entier n tel que l'écart à la limite soit inférieur à 10^{-4} .
- ③ Expression dans chaque cas de u_n en fonction de n . Écrire des fonctions Python permettant de valider graphiquement vos résultats.
- $u_{n+2} = 7u_{n+1} - 10u_n$ et $u_0 = -1, u_1 = 3$.
 - $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$ et $u_0 = 1, u_1 = \sqrt{3} - \frac{1}{2}$
 - $u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n, u_0 = 5, u_1 = -2$.
 - $u_{n+2} = \sqrt{u_{n+1}u_n}, u_0 = 1$ et $u_1 = 2$.

Exercice 4 ★ : Théorème de la limite monotone

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$

- Étudier la monotonie et la convergence de (u_n) .
- Écrire une fonction Python `suite(n)` qui calcule u_n
- Déterminons $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$:
 - Montrer par application du théorème des accroissements finis que :

$$\frac{1}{x+1} < \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) < \frac{1}{x}, \forall x \in \mathbb{R}_+$$

- En déduire que $u_n < \ln(2) < u_n + \frac{1}{2n}, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
Indication On pourra penser à mettre en place des télescopes.

- Conclure sur une fonction Python permettant d'obtenir une valeur approchée de $\ln(2)$.

Exercice 5 ★ : Télescopes

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)}$ et $T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$

- Calculer S_n pour tout entier $n \geq 2$ et en déduire que (S_n) converge dans $\mathbb{R}$.
- En déduire que (T_n) converge.

Exercice 6 ★★ Suites adjacentes :

Pour tout entier n non nul, on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ et $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$

On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = u_n - \frac{1}{n}$

- ① Démontrer que, pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $\ln(1+x) \leq x$.
- ② Montrez que u et v sont deux suites adjacentes. Que pouvez-vous en déduire ?
On note γ la limite de u (Ce réel est appelé la constante d'Euler).
- ③ À partir de quel entier est-on assuré que u_n est une approximation de γ à 10^{-3} près ?
- ④ Montrer que la suite A_n définie par $\forall n \in \mathbb{N}, A_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$ converge vers une limite ℓ .
indication : on pourra commencer par étudier les suites (A_{2n}) et (A_{2n+1})
- ⑤ Montrer que pour tout entier n non nul, $A_{2n} + H_{2n} = H_n$. En déduire la valeur de ℓ .
Noter que le résultat de la question 2. peut se formuler en :
 $\forall n \in \mathbb{N}, H_n = \gamma + \ln n + \varepsilon_n$, où $\gamma \in \mathbb{R}$ et $(\varepsilon_n)_n$ est une suite réelle convergeant vers 0.

Exercice 7 *** (oral Agro-Véto 2017) : suites équivalentes

On considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que $u_1 \in]0; \pi[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $u_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin(u_n)$.

- ① Montrer que pour tout $n \geq 3$: $0 < u_n < \frac{\pi}{2}$.
- ② Déterminer le seul réel vers lequel la suite (u_n) peut converger.
- ③ Représenter graphiquement u_n en fonction de n pour plusieurs valeurs de u_1 , puis émettre une conjecture sur la monotonie de la suite (u_n) .
- ④ Montrer que s'il existe un entier $n_0 \geq 4$ tel que $u_{n_0} \leq u_{n_0-1}$, alors la suite décroît strictement à partir du rang n_0 . (On utilisera une expression de $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de u_n et u_{n-1}).
- ⑤ Est-il possible que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n > u_{n-1}$ Conclure sur la convergence de (u_n) .
- ⑥ Émettre une conjecture sur la limite de $\sqrt{n}u_n$.
- ⑦ En posant pour $n \geq 1$, $x_n = \frac{u_n}{n}$, montrer que :

$$(x_{n+1} - x_n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{-n^2}{6} x_n^3, \text{ puis que } \frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^2}{3}$$

- ⑧ En admettant que le résultat précédent permet d'établir la relation suivante : $\frac{1}{x_n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{3}$,
vérifier la conjecture faite à la question 7.

Exercice 8 * (oral Agro-Véto 2018) :**

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt.$$

-   crire en Python une fonction permettant l'affichage graphique de $\tan^2, \tan^4, \tan^6, \tan^8$ sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.
- Faire une conjecture sur la monotonie et l'existence d'une limite de la suite (u_n) et la démontrer.
- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$ et $u_n \geq \frac{1}{2(2n+3)}$.
- De même qu'à la question précédente, en utilisant la valeur de $u_{n+1} + u_n$, donner un majorant de u_n .
Donner la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
-   crire une fonction prenant n en argument et renvoyant une valeur approchée de u_n .

   Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

a. Montrer que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad (1 + \tan^2 t) \sum_{k=0}^n (-\tan^2)^k(t) = 1 + (-1)^n \tan^{2n+2}(t)$.

b. Montrer que $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.

c. En déduire un algorithme permettant d'avoir une valeur approchée de π à ϵ près.