

Exercice 8

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t) dt$$

① def affichage(a, b):
 $x = \text{np.linspace}(a, b, 100)$
 for k in range(4):
 $\text{plt.plot}(x, \text{np.tan}(x) ** (2n+1), \text{label} = \text{'tan'} + \text{str}(2n+1))$
 $\text{plt.legend}(\text{loc} = \text{'best'})$
 $\text{plt.show}()$

② On conjecture que (u_n) est minorée par 0 donc converge

$$0 \leq t \leq \pi/4 \Rightarrow 0 \leq \tan(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \tan^{2n+4}(t) \leq \tan^{2n+2}(t) \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1 \text{ car } 0 < \frac{\pi}{4}$$

la suite (u_n) est décroissante, minorée par 0

Conclusion (u_n) converge.

③ $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} + u_n &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+4}(t) + \tan^{2n+2}(t) dt \\ &= \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2}(t) (\tan^2(t) + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2n+3} \tan^{2n+3}(t) \right]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2n+3} \tan^{2n+3}(\pi/4) \end{aligned}$$

Conclusion: $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$

on (u_n) décroît donc $u_{n+1} \leq u_n$

$$\Rightarrow u_{n+1} + u_n \leq 2u_n \Rightarrow u_n \geq \frac{1}{2(2n+3)}$$

(4) On a $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

et $u_{n+1} \leq u_n \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n + u_{n+1}$

$\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2(n+3)} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

or encore $u_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$

et comme $u_n \geq 0$, on conclut par théorème d'encadrement des limites que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

(5) D'après (3) et (4) : $0 \leq \frac{1}{2(n+3)} \leq u_n \leq \frac{1}{2(n+1)}$

donc $\frac{4n}{4n+6} \leq 4n \cdot u_n \leq \frac{4n}{4n+2}$

avec $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{4n+6} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n}{4n+2}$

conclusion $\lim_{n \rightarrow \infty} 4n u_n = 1 \Rightarrow u_n \sim \frac{1}{4n}$

! Remarque à lire APRÈS le chapitre "SÉRIES NUMÉRIQUES"

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{1/4n} = 1 \Leftrightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / \forall n \geq n_0, \frac{1}{2} \leq \frac{u_n}{1/4n} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \geq n_0, \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{n} \leq u_n$$

or $\sum \frac{1}{n}$ DV donc $\sum \frac{1}{8n}$ DV et par théorème de comparaison on a la série à termes positifs. D'où $\sum u_n$ est une série divergente.

(6) On rappelle que $\int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + k \frac{b-a}{n})$

Une écriture possible est la suivante (puisque $a=0$ et $b=\pi/4 = b-a$)

```
def valeur(n, m=1000):
    h = np.pi / (4*m)
    L = [np.tan(k*h)**(2*n+2) for k in range(m)]
    return h*sum(L)
```

⑦ Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$

a) Soit $t \in [0, \frac{\pi}{4}]$,

$$(1 + \tan^2 t) \sum_{k=0}^n (-\tan^2 t)^k$$

$$= \sum_{k=0}^n [(-\tan^2 t)^k - (-\tan^2 t)^{k+1}]$$

$$= (-\tan^2 t)^0 - (-\tan^2 t)^{n+1} = 1 - (-1)^{n+1} \tan^{2n+2} t$$

D'où

$$(1 + \tan^2 t) \sum_{k=0}^n (-\tan^2 t)^k = 1 + (-1)^n \tan^{2n+2} t$$

b) $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$ et $u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2} t \, dt$

D'après ⑦ a) :

$$\int_0^{\pi/4} \sum_{k=0}^n (1 + \tan^2 t) (-\tan^2 t)^k \, dt = \int_0^{\pi/4} dt + (-1)^n \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+2} t \, dt$$

[linéarité de l'intégrale]

Soit $\sum_{k=0}^n \int_0^{\pi/4} \underbrace{(1 + \tan^2 t) (-\tan^2 t)^k}_{(-1)^k (1 + \tan^2 t) \tan^{2k} t} \, dt = \frac{\pi}{4} + (-1)^n \cdot u_n$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=0}^n (-1)^k \left[\frac{\tan^{2k+1} t}{2k+1} \right]_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$$

$$\Leftrightarrow S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$$

c) Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ on en déduit que
$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{\pi}{4}$$

Et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} 4S_n = \pi$.

Pour ailleurs, $|4S_n - \pi| = |(-1)^n \cdot 4u_n|$
 $= 4u_n$ car $u_n \geq 0$.

et d'après (3) et (4): $\frac{1}{4n+6} \leq u_n \leq \frac{1}{4n+2}$

$$\Rightarrow |4S_n - \pi| \leq \frac{4}{4n+2}$$

$$\Rightarrow |4S_n - \pi| \leq \frac{2}{2n+1}$$

Une fonction possible consiste à calculer S_n
en partant de $n=0$ tant que $\frac{2}{2n+1} > \epsilon \dots$

```
def valApproche(eps):  
    S = 1  
    k = 0  
    while 2/(2*k+1) > eps:  
        k += 1  
        S += (-1)**k / (2*k+1)  
    return 4*S
```