

DEVOIR MAISON N° 1 : TD1 Suites numériques

Exercice 8 :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+2}(t) dt.$$

- ① Écrire en Python une fonction permettant l'affichage graphique de $\tan^2, \tan^4, \tan^6, \tan^8$ sur l'intervalle $[0, \pi/4]$.
- ② Faire une conjecture sur la monotonie et l'existence d'une limite de la suite (u_n) et la démontrer.
- ③ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} + u_n = \frac{1}{2n+3}$ et $u_n \geq \frac{1}{2(2n+3)}$.
- ④ De même qu'à la question précédente, en utilisant la valeur de $u_{n+1} + u_n$, donner un majorant de u_n . Donner la limite de (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- ⑤ Déterminer un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.
- ⑥ Écrire une fonction prenant n en argument et renvoyant une valeur approchée de u_n .
- ⑦ Soit $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$.
 - a. Montrer que $\forall t \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad (1 + \tan^2 t) \sum_{k=0}^n (-\tan^2)^k(t) = 1 + (-1)^n \tan^{2n+2}(t)$.
 - b. Montrer que $S_n = \frac{\pi}{4} + (-1)^n u_n$.
 - c. En déduire un algorithme permettant d'avoir une valeur approchée de π à ϵ près.