

DEVOIR MAISON N° 2 : TD2 Études de fonctions

Exercice 10 :

Soit n un entier naturel non nul. Soit la fonction f_n définie par $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$.

- ① Calculer $f'_n(x)$ puis $f''_n(x)$. Montrer que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- ②
 - a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution u_n sur $\mathbb{R}$ et montrer que
$$-\frac{1}{n} < u_n < 0$$
 - b. A l'aide de l'outil informatique de votre choix, conjecturer le comportement de (u_n) et conjecturer la limite de nu_n .
- ③ Compléter le programme suivant pour trouver u_n avec une précision de e , valeur réelle strictement positive.

```
def f(n,x):  
    f=1/(1+exp(x))+n*x  
    return f  
  
def dichotomie(n,e):  
    a,b = ...  
    while b-a ... :  
        c = (a+b)/2  
        if f(n,a)*f(n,c) ... :  
            ...  
        else:  
            ...  
    return ...
```

- ④ Comparer $f_n(x)$ et $f_{n+1}(x)$. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
- ⑤ Justifier que la suite (u_n) converge vers 0 et calculer la limite de nu_n .
- ⑥ Montrer que $u_n + \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{8n^2}$. Le contrôler à l'aide de la fonction `dichotomie`.

...D'après Agro-véto 2015