

## Correction TD02 - Analyse -

## Exercice 10 \*\*\* :

Soit  $n$  un entier naturel non nul. Soit la fonction  $f_n$  définie par  $f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx$ .

- ① Calculons  $f'_n(x)$  puis  $f''_n(x)$  : On commence par noter que  $x \mapsto \frac{1}{1+e^x}$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  car inverse d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}$  **qui ne s'annule pas** sur  $\mathbb{R}$ .  
Comme  $x \mapsto nx$  est une fonction polynôme (et donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ), on peut assurer que :

$$f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$$

Dès lors, pour tout  $x$  réel, on a :

$$f'_n(x) = \frac{-e^x}{(1+e^x)^2} + n \text{ et } f''_n(x) = \frac{e^x(e^x - 1)}{(1+e^x)^3}$$

Montrons que  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  :

D'après ce qui précède  $f''_n(x)$  est du signe de  $e^x - 1$ , à savoir **négatif** si  $x < 0$  et **positif** si  $x > 0$ .

Donc  $f'_n$  est décroissante sur  $\mathbb{R}_-$  et croissante sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $f'_n(0) = -\frac{1}{4} + n \geq 0$ .

|          |           |           |           |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| $x$      | $-\infty$ | $0$       | $+\infty$ |
| $f''(x)$ | $-$       | $0$       | $+$       |
| $f'(x)$  | $n$       | $n - 1/4$ | $+\infty$ |

Dès lors,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) \geq n - \frac{1}{4} > 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}^*$$

**Conclusion :**  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- ② a) Montrons que l'équation  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n$  sur  $\mathbb{R}$  et montrons que  $-\frac{1}{n} < u_n < 0$  :

D'après ce qui précède,  $f_n$  est continue et strictement croissant sur  $\mathbb{R}$ .

Une étude rapide des limites prouve que sa limite en  $-\infty$  vaut  $-\infty$  et sa limite en  $+\infty$  vaut  $+\infty$ .

On conclut que  $f_n$  est une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ .

Dès lors, d'après le théorème de la bijection,  $\exists! u_n \in \mathbb{R} / f(u_n) = 0$ .

Il reste à montrer que  $u_n \in [-\frac{1}{n}, 0]$ . Or

$$f_n(-\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+e^{-1/n}} - 1 < 0 \text{ car } 1+e^{-1/n} > 1 \text{ et } f_n(0) = \frac{1}{2} > 0$$

**Conclusion :**  $f_n(x) = 0$  admet une unique solution  $u_n$  sur  $[-\frac{1}{n}, 0]$ .

- b) A l'aide de Geogebra on suit en fonction de  $n$  l'évolution des solutions de  $f_n(x) = 0$ . On conjecture alors que  $(u_n)$  est croissante et converge vers 0. Il semble aussi que  $nu_n$  tende en l'infini vers  $-0.5$ .

③ Complétons le programme suivant pour trouver  $u_n$  avec une précision de  $\epsilon > 0$  :

```
def dichotomie(n,e):
    a,b = -1/n,0
    while b-a > e :
        c = (a+b)/2
        if f(n,a)*f(n,c) < 0 :
            b = c
        else:
            a = c
    return c
```

④ Comparons  $f_n(x)$  et  $f_{n+1}(x)$  :

Plusieurs méthodes possibles :

- On peut noter que  $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x$  et donc :  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$  si  $x < 0$ .
- On peut écrire que si  $x < 0$ , alors  $(n+1)x < nx$  et donc :  $f_{n+1}(x) < f_n(x)$ .

✎ On ne retient que le cas  $x < 0$  car on a vu en 2.a) que tous les termes  $u_n$  sont négatifs.

On peut dès lors poser  $x = u_n$  et en déduire comme demandé que la suite  $(u_n)$  est croissante. En effet :

$$f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_{n+1}) \text{ donc } f_n(u_{n+1}) > 0 = f_n(u_n)$$

Et puisque  $f_n$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , on en déduit que  $u_{n+1} > u_n$ .

**Conclusion :** La suite  $(u_n)$  est croissante.

⑤ Justifions que la suite  $(u_n)$  converge vers 0 et calculons la limite de  $nu_n$  :

Comme la suite  $(u_n)$  est croissante et majorée par 0, elle converge vers un réel  $l \leq 0$ .

L'encadrement obtenu à la question 2.a) permet par ailleurs de conclure directement par passage à la limite que : La suite  $(u_n)$  converge vers 0.

Par ailleurs,  $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow nu_n = -\frac{1}{1+e^{u_n}}$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**Conclusion :** La suite  $(nu_n)$  converge vers  $-\frac{1}{2}$

⑥ Montrons que  $u_n + \frac{1}{2n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{8n^2}$  :

Une rédaction possible consiste à montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} -8n^2 \cdot \left(u_n + \frac{1}{2n}\right) = 1$ .

Puisque  $f_n(u_n) = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} u_n + \frac{1}{2n} &= \frac{1}{2n} - \frac{1}{n} \frac{1}{1+e^{u_n}} \\ &= \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1+e^{u_n}} \right) = \frac{1}{n} \frac{e^{u_n} - 1}{2(1+e^{u_n})} \end{aligned}$$

Donc :

$$-8n^2 \left( u_n + \frac{1}{2n} \right) = -4n \frac{e^{u_n} - 1}{1 + e^{u_n}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -4n \frac{u_n}{2}$$

puisque  $u_n$  est proche de 0 pour de grandes valeurs de  $n$  et donc  $e^{u_n} - 1 \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} u_n$

Il suffit de rappeler que  $nu_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2}$

**Conclusion :**  $-8n^2 \left( u_n + \frac{1}{2n} \right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$  - Ce qu'il fallait démontrer

On va contrôler ce résultat à l'aide de la fonction `dichotomie` en évaluant pour de grandes valeurs de  $n$  la limite de la suite :

$$v_n = \left( u_n + \frac{1}{2n} \right) \cdot 8n^2$$

Voici le script Python utilisé qui commence par retourner, grâce à la fonction `suiteXn()` une liste `LX` contenant l'ensemble des termes de la suites  $(u_n)$  pour  $n$  allant de 1 à  $N$ .

La fonction `graphe` permet d'évaluer chacun des termes de la suite  $(v_n)$  là aussi pour  $n$  allant de 1 à  $N$ .

☞ On prendra garde que la liste `LX` est de longueur  $N$  avec `LX[0] = u1` et `LX[N] = uN-1`.

```
def suiteXn(N):
    LX = []
    for n in range(1,N+1): # termes de X1 à XN
        va = dichotomie(n,eps)
        LX.append(va)
    return LX
def graphe(N):
    abs = np.arange(1,N+1)
    LX = suiteXn(N)
    plt.figure("suite u")
    plt.plot(abs,LX,'ro-')
    Lv = [(LX[k]+1/(2*(k+1)))*(k+1)**2*8 for k in range(N)] # Calcul de v1 à vN-1
    plt.figure('suite (un+1/(2n))*n*n*8')
    plt.plot(abs,Lv,'bo-')
    plt.show()
graphe(30)
```

