

Devoir surveillé 2 : Suites numériques et fonctions

Le sujet se compose de deux exercices et d'un problème. On prendra soin de lire l'ensemble du sujet avant de commencer à composer.

Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de l'encadrement des résultats.

L'usage de la calculatrice est autorisé au cours de l'épreuve.

Exercice 1 :

① Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la valeur des sommes suivantes : $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k}$; $T_n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k$.

② On souhaite calculer : $S_n = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$ et $T_n = \sum_{k=0}^n k(k-1) \binom{n}{k}$

a) Rappeler comment faire ce calcul à l'aide d'une formule qui fait le lien entre $\binom{n}{k}$ et $\binom{n-1}{k-1}$.

b) Une deuxième méthode existe qui repose sur la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^n$.

i. Donner une autre expression de $f(x)$ grâce au binôme de Newton et en déduire que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

ii. Donner deux expressions de $f'(x)$ et $f''(x)$ à l'aide de la question précédente et retrouver les réponses obtenues en 2.a)

c) Que vaut $U_n = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k}$?

Exercice 2 :

Rappel. Algorithme de dichotomie

On considère une fonction g continue sur un segment $[a, b]$.

On suppose que g s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α

On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

— $a_0 = a$ et $b_0 = b$

— Pour tout entier naturel k on note $c_k = \frac{a_k + b_k}{2}$.

si $g(a_k)g(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$

sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

① Donner le tableau de variation de f et justifier que f s'annule pour trois réels distinctes α, β et γ où $\alpha < \beta < \gamma$.

② Montrer que $\alpha \in [-2, -1]$, $\beta \in [-1, 1]$ et $\gamma \in [1, 2]$.

③ Écrire une fonction Python `dichotomie(a, b, p)` qui renvoie une approximation à 10^{-p} près de l'unique solution de $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[a, b]$.

④ Quelles lignes de commande écrivez-vous pour renvoyer successivement les valeurs approchées de α, β et γ à 10^{-3} près ?

Problème (d'après Agro-véto B 2024)

Dans le problème, les candidat-e-s peuvent admettre le résultat d'une question ou d'une sous-question pour passer aux questions suivantes, à condition de le mentionner explicitement.

On s'intéresse ici à des modèles déterministes discrets d'évolution d'une population. Dans chacun des modèles, une suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ modélise le nombre d'individus dans la population à la génération n .

On supposera $u_0 \neq 0$ et on dit qu'il y a extinction si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

- ① Pour commencer, on propose le modèle suivant : chaque individu a un nombre moyen de descendants q ($q \in \mathbb{R}_+^*$), de telle sorte que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = qv_n$$

Exprimer v_n en fonction de v_0 et donner une condition d'extinction.

- ② On propose un nouveau modèle. On définit une suite (v_n) par :

$$v_0 \in \mathbb{R}_+ \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right)$$

où $S \in]0, +\infty[$ est une constante du problème.

- a) Déterminer une fonction f sur $\mathbb{R}_+$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = f(v_n)$$

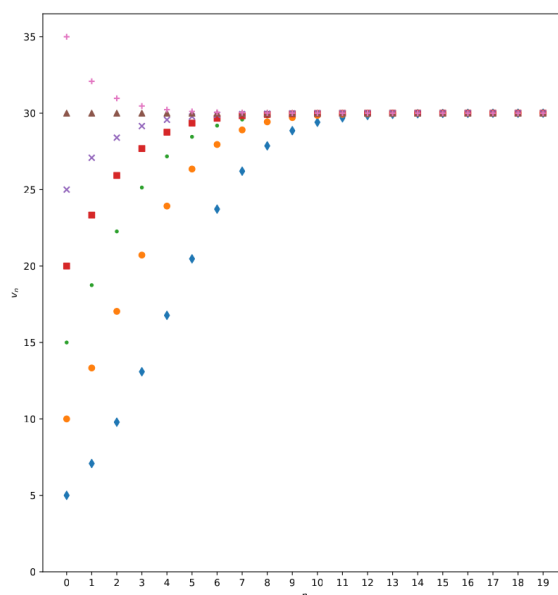
Faire l'étude de f et dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}_+$. On précisera notamment son comportement asymptotique.

- b) Compléter le code suivant pour qu'il trace les 20 premiers termes de la suite.

```

1      S = 30
2      v0 = 5
3      L = [v0]
4      v = v0
5      for k in ## LIGNE À COMPLÉTER ##
6          ## LIGNE À COMPLÉTER ##
7          ## LIGNE À COMPLÉTER ##
8      I = [k for k in range(## A COMPLETER ##)]
9      plt.plot(I, L, 'ro')
10     plt.xlabel("n")
11     plt.ylabel("v_n")
12     plt.show()
```

- c) Pour le tracé, on a utilisé le module `matplotlib.pyplot` sous l'alias `plt`. Comment importer le module ?
- d) On trace sur la même figure l'évolution de v_n pour différentes valeurs de v_0 . Cela donne les courbes proposées en haut de la page suivante (pour $S = 30$).
Conjecturer sur le comportement de la suite.
- e) On suppose maintenant que $v_0 \in]0, S]$.
- Montrer que pour tout n entier naturel, $v_n \in]0, S[$.
 - Démontrer que (v_n) est croissante.
 - En déduire qu'elle converge et donner sa limite.

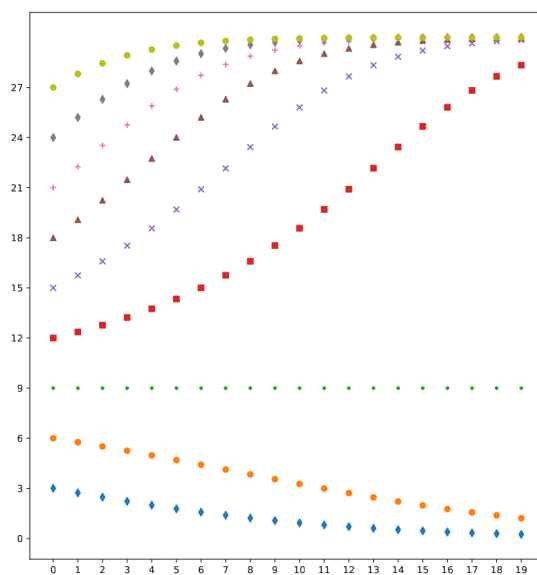


③ On souhaite affiner le modèle en modifiant la fonction f . Désormais,

$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}v_n \left(\frac{S - v_n}{S} \right) \left(\frac{v_n - A}{S} \right)$$

où $A \in]0, S[$ est fixé.

- a) Identifier f . Étudier le signe de $f(x) - x$ sur $[0, S]$. En déduire l'allure de la courbe représentative de f sur $[0, S]$. On fera attention à la position relative par rapport à la droite d'équation $y = x$ et on utilisera sans démonstration que f est une bijection strictement croissante de $[0, S]$ sur lui-même. Un code analogue au précédent donne le tracé suivant pour les premiers termes de la suite (v_n) pour $S = 30$ et $A = 9$. On se restreint à $v_0 \in [0, S]$.



- b) Dans cette question $v_0 \in]0, A[$. Démontrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $v_n \in]0, A[$, puis que (v_n) est décroissante. En déduire que (v_n) converge et déterminer sa limite.
- c) Réaliser une étude analogue lorsque $v_0 \in]A, S[$. Que se passe-t-il si $v_0 = A$?
- d) Donner une interprétation (en terme de dynamique des populations) des quantités A et S .