

MATHEMATIQUES

Révisions d'analyse

Exercice 1 :

1. Manipulations élémentaires avec Python :

① On considère la liste $L1 = [1, 3, 7, 'cinq', 7, 'neuf', 7, 11]$.

Comment, avec une commande Python et le seul recours à $L1$, pouvez-vous :

a) Obtenir le nombre d'éléments dans $L1$: `len(L1)`

b) afficher l'entier 11 : `L1[-1]` ou `print(L1[7])`

c) afficher le f de 'neuf' : `L1[5][3]` ou `L1[5][-1]`

d) compléter la liste pour qu'elle devienne : $[1, 3, 7, 'cinq', 7, 'neuf', 7, 11, 13]$:

`L1.append(13)` ou `L1 += [13]`

e) Compter le nombre de 7 dans la liste : `L1.count(7)`

② Créer la liste $L2 = [1, 4, 9, 16, 25, \dots, 100]$: `L2 = [k**2 for k in range(1,11)]`

③ On suppose avoir importé la bibliothèque `numpy` grâce à la commande `import numpy as np`.
Que fait :

a) `np.arange(10)` ? `array([0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])`

b) `np.arange(1,10)` ? `array([1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9])`

c) `np.arange(1,10,2)` ? `array([1, 3, 5, 7, 9])`

Remarque : Les trois précédents tableaux sont formés d'entiers.

d) `np.linspace(1,10,10)` ? `array([ 1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 8., 9., 10.])`

Remarque : Le tableau précédent est formé de réels (`numpy.float`)

Exercice 2 : Sommes usuelles

1. Donner la valeur des sommes suivantes :

$$S_1 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \times \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{\frac{2}{3}} = \boxed{\frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3^n}\right)}$$

$$S_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k - \binom{n}{n} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\frac{4^n - 1}{3^n}}$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=\boxed{1}}^n k \binom{n}{k} 3^k = n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} 3^k \text{ car } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 3^{i+1} \text{ en effectuant le changement d'indice : } i = k - 1$$

$$= 3n \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} 3^i = 3n(1+3)^{n-1} = \boxed{3n4^{n-1}}$$

$$S_4 = \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=0}^n (k(k-1) + k) \binom{n}{k} 3^k = \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} 3^k + S_3$$

$$= n(n-1) \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} 3^k + S_3 \text{ car } k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}; (k-1) \binom{n-1}{k-1} = (n-1) \binom{n-2}{k-2}$$

$$= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} 3^{j+2} + S_3 \text{ en posant : } j = k - 2$$

$$= 9n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} 3^j + S_3 = 9n(n-1)4^{n-2} + 3n4^{n-1}$$

$$= 3n4^{n-2} (3(n-1) + 4) = \boxed{3n(3n+1)4^{n-2}}$$

2. Rappelons la formule de Pascal : $\boxed{\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}}$

Application :

$$\begin{aligned} \sum_{k=p}^n \binom{k}{p} &= \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^n \left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right) \\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1 \\ &= \boxed{\binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \leq p \leq n} \end{aligned}$$

3. Somme télescopique : $\sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-2}{2n}}$

Exercice 3 : Suites adjacentes

On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ et $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$

① Montrons que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes :

— Sens de variation de la suite (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} \\ &= \frac{1 - 2(n+1) + 2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} = \frac{2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1)}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Le dénominateur étant positif, le signe de $u_{n+1} - u_n$ dépend du signe du seul numérateur.
Or pour tout n entier naturel :

$$\begin{aligned} 2\sqrt{n(n+1)} - (2n+1) &> 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{n(n+1)} > 2n+1 \\ &\Leftrightarrow 4n(n+1) > 4n^2 + 4n + 1 \text{ (on élève au carré des termes positifs)} \\ &\Leftrightarrow 0 > 1 \text{ ce qui est absurde} \end{aligned}$$

Donc $u_{n+1} - u_n < 0$ ou encore (u_n) est décroissante

— Sens de variation de la suite (v_n) :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+2} - \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2\sqrt{n+2} + 2\sqrt{n+1} \\ &= \frac{1 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} + 2(n+1)}{\sqrt{n+1}} = \frac{2n+3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)}}{\sqrt{n+1}} \end{aligned}$$

Le dénominateur étant positif, le signe de $v_{n+1} - v_n$ dépend du signe du seul numérateur.
Or pour tout n entier naturel :

$$\begin{aligned} 2n+3 - 2\sqrt{(n+1)(n+2)} &> 0 \Leftrightarrow 2n+3 > 2\sqrt{(n+1)(n+2)} \\ &\Leftrightarrow 4n^2 + 12n + 9 > 4(n+1)(n+2) = 4(n^2 + 3n + 2) \text{ (on élève au carré)} \\ &\Leftrightarrow 9 > 8 \text{ ce qui est toujours vrai} \end{aligned}$$

Donc $v_{n+1} - v_n > 0$ ou encore (v_n) est croissante

— Étudions enfin la limite en l'infini de $u_n - v_n$:

$$u_n - v_n = 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 2 \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$

Conclusion : Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

② En déduire que $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2\sqrt{n}$.

On commence par utiliser le théorème des suites adjacentes qui assure qu'il existe un réel L tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$. En conséquence :

$$\frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}}{2\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n} + u_n}{2\sqrt{n}} = 1 + \frac{u_n}{2\sqrt{n}}$$

Or $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = L$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{2\sqrt{n}} = 0$, ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{u_n}{2\sqrt{n}}\right) = 1$

Conclusion : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}$

Exercice 4 : Connaissances de suites récurrentes usuelles

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies par $u_0 = 1$ et $v_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = 3u_n + 2v_n \text{ et } v_{n+1} = 2u_n + 3v_n$$

① Inutile ici d'importer une bibliothèque.

Voici deux versions possibles renvoyant les listes : $\text{Lu} = [u_0, u_1, \dots, u_n]$ et $\text{Lv} = [v_0, v_1, \dots, v_n]$.

1 def suitesRecurrentes(n):	1 def suitesRecurrentes2(n):
2 u, v = 1, 2	2 Lu, Lv = [1], [2]
3 Lu, Lv = [u], [v]	3 for k in range(1, n+1):
4 for k in range(1, n+1):	4 u_suiv = 3*Lu[-1]+2*Lv[-1]
5 u, v = 3*u+2*v, 2*u+3*v	5 v_suiv = 2*Lu[-1]+3*Lv[-1]
6 Lu.append(u)	6 Lu.append(u_suiv)
7 Lv.append(v)	7 Lv.append(v_suiv)
8 return Lu, Lv	8 return Lu, Lv

② Montrons que la suite $(u_n - v_n)_{(n \geq 0)}$ est constante : il suffit de faire la différence terme à terme.

$$u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n + 2v_n - (2v_n + 3v_n) = u_n - v_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Conclusion : $(u_n - v_n)$ est constante égale à $u_0 - v_0 = -1$.

③ Prouvons que (u_n) est une suite arithmético-géométrique :

D'après la question précédente, on a : $v_n = 1 + u_n$.

D'où $u_{n+1} = 3u_n + 2(1 + u_n) = 5u_n + 2$.

Conclusion : (u_n) suite arithmético-géométrique définie par $u_{n+1} = 5u_n + 2, \forall n \in \mathbb{N}, v_0 = 2$

④ Exprimons les termes généraux des suites (u_n) et (v_n) :

On commence par déterminer le point fixe : $L = 5L + 2 \Leftrightarrow L = -\frac{1}{2}$. Alors :

$$\begin{cases} u_{n+1} &= 5u_n + 2 \\ L &= 5L + 2 \end{cases} \Rightarrow u_{n+1} - L = 5(u_n - L) \text{ par soustraction des deux lignes}$$

On reconnaît une suite géométrique. D'où :

$$u_n - L = 5^n(u_0 - L)$$

ou encore :

$$u_n = 5^n\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{3}{2} \times 5^n - \frac{1}{2}$ et $v_n = 1 + u_n = 5^n + \frac{1}{2}$

⑤ On pourra confronter grâce à Python les résultats obtenus à l'aide des formes explicites en écrivant :

```
1 def suitesExplicites(n):
2     Lu = [3*5**k/2-1/2 for k in range(n+1)]
3     Lv = [3*5**k/2+1/2 for k in range(n+1)]
4     return Lu, Lv
```

Exercice 5 : suite numérique et série

① Étude de (u_n) .

a) $u_1 = 2u_0 + 0 - 1 = 1$, $u_2 = 2u_1 + 1 - 1 = 2$ et $u_3 = 2u_2 + 2 - 1 = 5$.

b) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $u_n \geq 1$.

— *Initialisation* : $u_0 = 1 \geq 1$.

— *Hérédité* : supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, $u_n \geq 1$. Montrons que $u_{n+1} \geq 1$.

On sait que :

$$u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \geq 2 \times 1 + n - 1 = n + 1 \geq 1.$$

— **Conclusion** : $\forall n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n \geq 1$.

c) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \geq 2 + n - 1 = n + 1$. Ce qui revient à : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n \geq n$.

Comme on a $u_0 = 1 \geq 1$, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$.

Grâce au théorème d'encadrement sur les limites, comme $\lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$$

d) Montrons que (u_n) est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n + n - 1 \geq 1 + n - 1 = n \geq 0$.

Conclusion : la suite (u_n) est bien croissante.

② Expression de u_n : on pose : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_n + n$.

a) Pour tout n , on a : $v_{n+1} = u_{n+1} + n + 1 = 2u_n + n - 1 + n + 1 = 2(u_n + n) = 2v_n$.

b) On en déduit que (v_n) est géométrique de raison 2 d'où : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = 2^n v_0 = 2^n u_0$.

Conclusion : $\boxed{v_n = 2^n}$

c) On en déduit : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = v_n - n = 2^n - n$.

d) D'après ce qui précède, on a $\frac{u_n}{2^n} = \frac{2^n - n}{2^n} = 1 - \frac{n}{2^n}$.

et d'après les croissances comparées en $+\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$.

Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2^n}$

③ Calcul d'une somme.

a) $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{2u_n + n - 2}{2^n} = \frac{2(u_n - 1) + n}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n}$.

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

— Initialisation : $\frac{u_1 - 1}{2^{1-1}} = 0 = \sum_{k=0}^{1-1} \frac{k}{2^k}$.

— Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$.

On a alors : $\frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \frac{n}{2^n} \stackrel{\text{HR}}{=} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} + \frac{n}{2^n} = \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k}$ donc l'égalité est vraie au rang $n + 1$.

— **Conclusion** : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}}$

c) On en déduit alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = \frac{u_{n+1} - 1}{2^n} = \frac{2^{n+1} - n - 2}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$.

De plus, grâce au théorème des croissances comparées en $+\infty$ on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+2}{2^n} = 0$ d'où, par passage à la limite :

Conclusion : $\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{k}{2^k} = 2}$