

Echauffements

31 août 2025

Fiches d'échauffement

- 1 Logique et sommes usuelles
- 2 Nombres complexes et trigonométrie
- 3 Polynômes

Table des matières

- 1 Logique et sommes usuelles
- 2 Nombres complexes et trigonométrie
- 3 Polynômes

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y :$
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$:
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
non(P_2) :
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$:
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
non(P_2) : $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$:
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
non(P_2) : $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$; **FAUX**.
non(P_3) :
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$:
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
non(P_2) : $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$; **FAUX**.
non(P_3) : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / p \leq n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$:
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
 $\text{non}(P_2) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$; **FAUX**.
 $\text{non}(P_3) : \forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / p \leq n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$; ; **FAUX**.
 $\text{non}(P_4) :$
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
non(P_2) : $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$; **FAUX**.
non(P_3) : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / p \leq n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$; ; **FAUX**.
non(P_4) : $\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
non(P_2) : $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$; **FAUX**.
non(P_3) : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / p \leq n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$; ; **FAUX**.
non(P_4) : $\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$;
FAUX.
non(P_5) :

Négations

Les propositions suivantes sont elles vraies ? dans le cas contraire, énoncer leur négation :

- $(P_1) : \exists n \in \mathbb{N} / n^2 > 5$; **VRAI**
- $(P_2) : \forall n \in \mathbb{N}, n^2 > 5$; **FAUX**.
non(P_2) : $\exists n \in \mathbb{N} / n^2 \leq 5$
- $(P_3) : \exists p \in \mathbb{N} / \forall n \in \mathbb{N}, p > n^2$; **FAUX**.
non(P_3) : $\forall p \in \mathbb{N}, \exists n \in \mathbb{N} / p \leq n^2$
- $(P_4) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \exists y \in \mathbb{R} / \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq y$; ; **FAUX**.
non(P_4) : $\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$
- $(P_5) : \forall f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}, \forall (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$;
FAUX.
non(P_5) : $\exists f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists (x, x') \in \mathbb{R}^2, x \neq x' \text{ et } f(x) = f(x')$

Ordre des quantificateurs

Soit $E = \{\text{exercices du T.D.1}\}$ et $B = \{\text{étudiants de BCPST2}\}$.
On considère la relation notée $P(x, y)$ qui désigne : x est résolu par y .

Soit les A , B , C et D les propositions suivantes :

- $A : \forall x \in E, \exists y \in B / P(x, y)$.
- $B : \exists y \in B / \forall x \in E, P(x, y)$.
- $C : \exists x \in E / \forall y \in B, P(x, y)$.
- $D : \forall y \in B, \exists x \in E / P(x, y)$.

Indiquez les propositions qui sont toujours vraies :

$A \Rightarrow B ?$

$B \Rightarrow A ?$

$C \Rightarrow D ?$

$D \Rightarrow C ?$

Ordre des quantificateurs

Soit $E = \{\text{exercices du T.D.1}\}$ et $B = \{\text{étudiants de BCPST2}\}$.
On considère la relation notée $P(x, y)$ qui désigne : x est résolu par y .

Soit les A , B , C et D les propositions suivantes :

- $A : \forall x \in E, \exists y \in B / P(x, y)$.
- $B : \exists y \in B / \forall x \in E, P(x, y)$.
- $C : \exists x \in E / \forall y \in B, P(x, y)$.
- $D : \forall y \in B, \exists x \in E / P(x, y)$.

Indiquez les propositions qui sont toujours vraies :

$A \Rightarrow B$? **Faux**

$B \Rightarrow A$?

$C \Rightarrow D$?

$D \Rightarrow C$?

Ordre des quantificateurs

Soit $E = \{\text{exercices du T.D.1}\}$ et $B = \{\text{étudiants de BCPST2}\}$.
On considère la relation notée $P(x, y)$ qui désigne : x est résolu par y .

Soit les A , B , C et D les propositions suivantes :

- $A : \forall x \in E, \exists y \in B / P(x, y)$.
- $B : \exists y \in B / \forall x \in E, P(x, y)$.
- $C : \exists x \in E / \forall y \in B, P(x, y)$.
- $D : \forall y \in B, \exists x \in E / P(x, y)$.

Indiquez les propositions qui sont toujours vraies :

$A \Rightarrow B$? **Faux**

$B \Rightarrow A$? **Vrai**

$C \Rightarrow D$?

$D \Rightarrow C$?

Ordre des quantificateurs

Soit $E = \{\text{exercices du T.D.1}\}$ et $B = \{\text{étudiants de BCPST2}\}$.
On considère la relation notée $P(x, y)$ qui désigne : x est résolu par y .

Soit les A , B , C et D les propositions suivantes :

- $A : \forall x \in E, \exists y \in B / P(x, y)$.
- $B : \exists y \in B / \forall x \in E, P(x, y)$.
- $C : \exists x \in E / \forall y \in B, P(x, y)$.
- $D : \forall y \in B, \exists x \in E / P(x, y)$.

Indiquez les propositions qui sont toujours vraies :

$A \Rightarrow B$? **Faux**

$B \Rightarrow A$? **Vrai**

$C \Rightarrow D$? **Vrai**

$D \Rightarrow C$?

Ordre des quantificateurs

Soit $E = \{\text{exercices du T.D.1}\}$ et $B = \{\text{étudiants de BCPST2}\}$.
On considère la relation notée $P(x, y)$ qui désigne : x est résolu par y .

Soit les A , B , C et D les propositions suivantes :

- $A : \forall x \in E, \exists y \in B / P(x, y)$.
- $B : \exists y \in B / \forall x \in E, P(x, y)$.
- $C : \exists x \in E / \forall y \in B, P(x, y)$.
- $D : \forall y \in B, \exists x \in E / P(x, y)$.

Indiquez les propositions qui sont toujours vraies :

$A \Rightarrow B$? **Faux**

$B \Rightarrow A$? **Vrai**

$C \Rightarrow D$? **Vrai**

$D \Rightarrow C$? **Faux**

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est :
- Sa contraposée est :

- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :

- P implique Q , P donc Q ?
- Il faut P pour avoir Q ?
- Il suffit d'avoir P pour avoir Q ?
- Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ?
- On a P si on a Q ?
- On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
- Sa contraposée est :

- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :

- P implique Q , P donc Q ?
- Il faut P pour avoir Q ?
- Il suffit d'avoir P pour avoir Q ?
- Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ?
- On a P si on a Q ?
- On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
- Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$

- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :

- P implique Q , P donc Q ?
- Il faut P pour avoir Q ?
- Il suffit d'avoir P pour avoir Q ?
- Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ?
- On a P si on a Q ?
- On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ?
 - Il faut P pour avoir Q ?
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ?
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ?
 - On a P si on a Q ?
 - On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ?
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ?
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ?
 - On a P si on a Q ?
 - On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ?
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ?
 - On a P si on a Q ?
 - On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ?
 - On a P si on a Q ?
 - On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ?
 - On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ? **Faux**
 - On a P seulement si on a Q ?

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ? **Faux**
 - On a P seulement si on a Q ? **Vrai**

- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :

- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
- Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ? **Faux**
 - On a P seulement si on a Q ? **Vrai**
- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :
- P si et seulement si Q : « P si Q » : et « P seulement si Q » :
 - Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ? **Faux**
 - On a P seulement si on a Q ? **Vrai**
- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :
- P si et seulement si Q : « P si Q » : $Q \Rightarrow P$ et « P seulement si Q » :
 - Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ? **Faux**
 - On a P seulement si on a Q ? **Vrai**
- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :
- P si et seulement si Q : « P si Q » : $Q \Rightarrow P$ et « P seulement si Q » : $P \Rightarrow Q$
 - Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ? **Faux**
 - On a P seulement si on a Q ? **Vrai**
- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :
- P si et seulement si Q : « P si Q » : $Q \Rightarrow P$ et « P seulement si Q » : $P \Rightarrow Q$
 - Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : $Q \Rightarrow P$ et « suffisant » :

Les connecteurs

- ① $P \Rightarrow Q$ signifie « Q est vraie ou P est fausse » soit :

Q ou $\text{non}P$

- Sa négation est : $\text{non}Q$ et P
 - Sa contraposée est : $\text{non}Q \Rightarrow \text{non}P$
- ② $P \Rightarrow Q$ se traduit par (Vrai/Faux) :
- P implique Q , P donc Q ? **Vrai**
 - Il faut P pour avoir Q ? **Faux**
 - Il suffit d'avoir P pour avoir Q ? **Vrai**
 - Il est nécessaire d'avoir P pour avoir Q ? **Faux**
 - On a P si on a Q ? **Faux**
 - On a P seulement si on a Q ? **Vrai**
- ③ Retrouvez les connecteurs en jeu dans :
- P si et seulement si Q : « P si Q » : $Q \Rightarrow P$ et « P seulement si Q » : $P \Rightarrow Q$
 - Il est nécessaire et suffisant d'avoir P pour avoir Q :
« nécessaire » : $Q \Rightarrow P$ et « suffisant » : $P \Rightarrow Q$

Les principaux modes de raisonnement

- **le raisonnement déductif.** Montrer que il est suffisant que n soit pair pour que n^2 soit pair.
- **le raisonnement par contraposition.** Montrer qu'il est nécessaire que n soit pair pour que n^2 soit pair.
- **le raisonnement par l'absurde.** Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.
- **le raisonnement par récurrence.** Montrer que

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Eléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E$:
- A n'est pas inclus dans E :
- $z \in E \times F$:
- $f = g$:
- $f \neq g$:
- $y \in f(A)$:
- $x \in f^{-1}(B)$:

Eléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E : \forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$
- A n'est pas inclus dans E :
- $z \in E \times F$:
- $f = g$:
- $f \neq g$:
- $y \in f(A)$:
- $x \in f^{-1}(B)$:

Eléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E : \forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$
- A n'est pas inclus dans $E : \exists x / x \in A$ et $x \notin E$
- $z \in E \times F :$
- $f = g :$
- $f \neq g :$
- $y \in f(A) :$
- $x \in f^{-1}(B) :$

Éléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E : \forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$
- A n'est pas inclus dans $E : \exists x / x \in A$ et $x \notin E$
- $z \in E \times F : \exists x \in E$ et $\exists y \in F / z = (x, y)$
- $f = g :$
- $f \neq g :$
- $y \in f(A) :$
- $x \in f^{-1}(B) :$

Eléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E : \forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$
- A n'est pas inclus dans $E : \exists x / x \in A$ et $x \notin E$
- $z \in E \times F : \exists x \in E$ et $\exists y \in F / z = (x, y)$
- $f = g : \forall x \in E, f(x) = g(x)$
- $f \neq g :$
- $y \in f(A) :$
- $x \in f^{-1}(B) :$

Éléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E : \forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$
- A n'est pas inclus dans $E : \exists x / x \in A$ et $x \notin E$
- $z \in E \times F : \exists x \in E$ et $\exists y \in F / z = (x, y)$
- $f = g : \forall x \in E, f(x) = g(x)$
- $f \neq g : \exists x \in E / f(x) \neq g(x)$
- $y \in f(A) :$
- $x \in f^{-1}(B) :$

Eléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E : \forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$
- A n'est pas inclus dans $E : \exists x / x \in A$ et $x \notin E$
- $z \in E \times F : \exists x \in E$ et $\exists y \in F / z = (x, y)$
- $f = g : \forall x \in E, f(x) = g(x)$
- $f \neq g : \exists x \in E / f(x) \neq g(x)$
- $y \in f(A) : \exists x \in A / f(x) = y$
- $x \in f^{-1}(B) :$

Éléments de langage symbolique

Soit E et F deux ensembles, f et g deux applications de E dans F .
Traduire :

- $A \subset E : \forall x, x \in A \Rightarrow x \in E$
- A n'est pas inclus dans $E : \exists x / x \in A$ et $x \notin E$
- $z \in E \times F : \exists x \in E$ et $\exists y \in F / z = (x, y)$
- $f = g : \forall x \in E, f(x) = g(x)$
- $f \neq g : \exists x \in E / f(x) \neq g(x)$
- $y \in f(A) : \exists x \in A / f(x) = y$
- $x \in f^{-1}(B) : f(x) \in B$

Injectivité/surjectivité/bijektivité

Soit $f \in \mathcal{A}(E, F)$. Comment montrez-vous que :

- f est **injective** :

- f est **surjective** :

- f est **bijective** :

Injectivité/surjectivité/bijektivité

Soit $f \in \mathcal{A}(E, F)$. Comment montrez-vous que :

- f est **injective** : Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au plus** un antécédant ou encore

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- f est **surjective** :

- f est **bijective** :

Injectivité/surjectivité/bijektivité

Soit $f \in \mathcal{A}(E, F)$. Comment montrez-vous que :

- f est **injective** : Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au plus** un antécédant ou encore

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- f est **surjective** : Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au moins** un antécédant ou $f(E) = F$ ou encore

$$\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$$

- f est **bijective** :

Injectivité/surjectivité/bijektivité

Soit $f \in \mathcal{A}(E, F)$. Comment montrez-vous que :

- f est **injective** : Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au plus** un antécédant ou encore

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- f est **surjective** : Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au moins** un antécédant ou $f(E) = F$ ou encore

$$\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$$

- f est **bijective** : f est à la fois injective et surjective. Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **un unique** antécédant ou encore

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E / f(x) = y$$

Injectivité/surjectivité/bijektivité

Soit $f \in \mathcal{A}(E, F)$. Comment montrez-vous que :

- f est **injective** : Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au plus** un antécédant ou encore

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

- f est **surjective** : Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **au moins** un antécédant ou $f(E) = F$ ou encore

$$\forall y \in F, \exists x \in E / f(x) = y$$

- f est **bijective** : f est à la fois injective et surjective. Tout élément de l'ensemble d'arrivée possède **un unique** antécédant ou encore

$$\forall y \in F, \exists ! x \in E / f(x) = y$$

Ne pas oublier : f est bijective si et seulement si :

$$\exists g \in \mathcal{A}(F, E) / g \circ f = id_E \text{ et } f \circ g = id_F.$$

g est alors unique, bijective, on la note f^{-1} .

Sommes des termes d'une suite numérique usuelle

- Cas d'une suite géométrique définie par $u = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=1}^n u_k =$$

$$\sum_{k=0}^n u_k =$$

- Cas d'une suite arithmétique définie par $u = (u_0 + nr)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=0}^n u_k =$$

$$\sum_{k=a}^b u_k =$$

Application : $\sum_{k=1}^n k =$

Sommes des termes d'une suite numérique usuelle

- Cas d'une suite géométrique définie par $u = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=1}^n u_k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^n u_k =$$

- Cas d'une suite arithmétique définie par $u = (u_0 + nr)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=0}^n u_k =$$

$$\sum_{k=a}^b u_k =$$

Application : $\sum_{k=1}^n k =$

Sommes des termes d'une suite numérique usuelle

- Cas d'une suite géométrique définie par $u = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=1}^n u_k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Cas d'une suite arithmétique définie par $u = (u_0 + nr)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=0}^n u_k =$$

$$\sum_{k=a}^b u_k =$$

Application : $\sum_{k=1}^n k =$

Sommes des termes d'une suite numérique usuelle

- Cas d'une suite géométrique définie par $u = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=1}^n u_k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Cas d'une suite arithmétique définie par $u = (u_0 + nr)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$\sum_{k=a}^b u_k =$$

Application : $\sum_{k=1}^n k =$

Sommes des termes d'une suite numérique usuelle

- Cas d'une suite géométrique définie par $u = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=1}^n u_k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Cas d'une suite arithmétique définie par $u = (u_0 + nr)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$\sum_{k=a}^b u_k = (b - a + 1) \frac{u_a + u_b}{2}$$

Application : $\sum_{k=1}^n k =$

Sommes des termes d'une suite numérique usuelle

- Cas d'une suite géométrique définie par $u = (q^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=1}^n u_k = q \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$$\sum_{k=0}^n u_k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

- Cas d'une suite arithmétique définie par $u = (u_0 + nr)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\sum_{k=0}^n u_k = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}$$

$$\sum_{k=a}^b u_k = (b - a + 1) \frac{u_a + u_b}{2}$$

Application : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

Manipulation des sommes

Effectuer les changements d'indice proposés :

- $\underline{j = i + 1} : \sum_{i=0}^n u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} u$
- $\underline{j = i + 2} : \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=2}^{n+2} u$
- $\underline{j = n - i} : \sum_{i=0}^n u_{n-i} = \sum_{j=0}^n u$
- $\underline{j = i - 1} : \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}$

Manipulation des sommes

Effectuer les changements d'indice proposés :

- $\underline{j = i + 1} : \sum_{i=0}^n u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} u_j$
- $\underline{j = i + 2} : \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=}$
- $\underline{j = n - i} : \sum_{i=0}^n u_{n-i} = \sum_{j=}$
- $\underline{j = i - 1} : \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = \sum_{j=}$

Manipulation des sommes

Effectuer les changements d'indice proposés :

- $\underline{j = i + 1} : \sum_{i=0}^n u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} u_j$
- $\underline{j = i + 2} : \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=2}^{n+2} u_{j-2}$
- $\underline{j = n - i} : \sum_{i=0}^n u_{n-i} = \sum_{j=0}^n u_j$
- $\underline{j = i - 1} : \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j}$

Manipulation des sommes

Effectuer les changements d'indice proposés :

- $\underline{j = i + 1} : \sum_{i=0}^n u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} u_j$
- $\underline{j = i + 2} : \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=2}^{n+2} u_{j-2}$
- $\underline{j = n - i} : \sum_{i=0}^n u_{n-i} = \sum_{j=0}^n u_j$
- $\underline{j = i - 1} : \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = \sum_{j=}$

Manipulation des sommes

Effectuer les changements d'indice proposés :

- $\underline{j = i + 1} : \sum_{i=0}^n u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} u_j$

- $\underline{j = i + 2} : \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=2}^{n+2} u_{j-2}$

- $\underline{j = n - i} : \sum_{i=0}^n u_{n-i} = \sum_{j=0}^n u_j$

- $\underline{j = i - 1} : \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} =$

Manipulation des sommes

Effectuer les changements d'indice proposés :

- $\underline{j = i + 1} : \sum_{i=0}^n u_{i+1} = \sum_{j=1}^{n+1} u_j$
- $\underline{j = i + 2} : \sum_{i=0}^n u_i = \sum_{j=2}^{n+2} u_{j-2}$
- $\underline{j = n - i} : \sum_{i=0}^n u_{n-i} = \sum_{j=0}^n u_j$
- $\underline{j = i - 1} : \sum_{i=1}^n \binom{n-1}{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} = 2^{n-1}$

identité remarquable

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux complexes, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \times \dots$$

$$\textcircled{1} \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k ?$$

$$\textcircled{2} \sum_{k=0}^n a^k b^{n-k} ?$$

$$\textcircled{3} \sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k} ?$$

$$\textcircled{4} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} ?$$

identité remarquable

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux complexes, on a :
 $a^n - b^n = (a - b) \times \dots$

① $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$? **Vrai**

② $\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$?

③ $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$?

④ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$?

identité remarquable

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux complexes, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \times \dots$$

① $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$? **Vrai**

② $\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$? **Faux**

③ $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$?

④ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$?

identité remarquable

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux complexes, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \times \dots$$

① $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$? **Vrai**

② $\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$? **Faux**

③ $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$? **Faux**

④ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$?

identité remarquable

Soient n un entier naturel non nul, a et b deux complexes, on a :

$$a^n - b^n = (a - b) \times \dots$$

① $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$? **Vrai**

② $\sum_{k=0}^n a^k b^{n-k}$? **Faux**

③ $\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} a^k b^{n-k}$? **Faux**

④ $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$? **Faux**

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n =$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k =$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k =$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k =$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k =$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k =$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k =$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k =$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k =$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k =$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k =$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k =$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k =$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 2^n$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 2^n$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} =$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 2^n$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} =$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n; \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1; \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 2^n;$
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}; \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 2^n$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n [k(k-1) + k] \binom{n}{k} =$

Binôme de Newton

Rappel : $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, n \in \mathbb{N}^*, (a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

Applications :

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$; $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k = (a + 1)^n$
- $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 1$; $\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^k = 3^n - 2^n$;
- $\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$
- $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$; $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k} = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$
- $\sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n [k(k-1) + k] \binom{n}{k} = n(n+1)2^{n-2}$

Manipulation des sommes (suite)

- $$\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{2n} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} - \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

Calculer $A_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$:

Manipulation des sommes (suite)

- $$\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{2n} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} - \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$

Calculer $A_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$:

Manipulation des sommes (suite)

- $$\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{2n} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} - \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$

Calculer $A_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$:

Manipulation des sommes (suite)

- $$\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{2n} u_k$$

- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$

$$\sum_{k=1}^n u_{2k} - \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

Calculer $A_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$:

Manipulation des sommes (suite)

- $$\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k = \sum_{k=1}^{2n} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} + \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} u_k$$
- $$\sum_{k=1}^n u_{2k} - \sum_{k=0}^n u_{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^k u_k$$

Calculer $A_n = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}$ et $B_n = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$:

$$A_n + B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \text{ et } A_n - B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k = 0. \text{ Soit}$$

$$A_n = B_n = 2^{n-1}$$

les sommes classiques

- $\sum_{i=1}^n 1 =$

- $\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j =$

- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i + j) =$

- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1 =$

- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} =$

les sommes classiques

- $\sum_{i=1}^n 1 = n$
- $\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j =$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i + j) =$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1 =$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} =$

les sommes classiques

- $\sum_{i=1}^n 1 = n$
- $\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) =$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1 =$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} =$

les sommes classiques

- $\sum_{i=1}^n 1 = n$
- $\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (i+j) \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n j =$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1 =$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} =$

les sommes classiques

- $\sum_{i=1}^n 1 = n$
- $\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) = n^2(n+1)$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1 =$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} =$

les sommes classiques

- $\sum_{i=1}^n 1 = n$
- $\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) = n^2(n+1)$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1 = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} =$

les sommes classiques

- $\sum_{i=1}^n 1 = n$
- $\sum_{i=1}^n i + \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n(n+1)$
- $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (i+j) = n^2(n+1)$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} 1 = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{1 \leq j \leq i \leq n} \frac{j}{i} = \frac{n(n+3)}{4}$

Télescopes et formule de Pascal

- **Télescopes** : $\sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) =$

Application : $\sum_{k=0}^n q^k (1 - q) =$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

- **Formule de Pascal** : $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} =$

Application : Montrer que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \leq p \leq n$

Télescopes et formule de Pascal

- **Télescopes** :
$$\sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$$

Application :
$$\sum_{k=0}^n q^k (1 - q) =$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

- **Formule de Pascal** :
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} =$$

Application : Montrer que
$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \leq p \leq n$$

Télescopes et formule de Pascal

- **Télescopes** :
$$\sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$$

Application :
$$\sum_{k=0}^n q^k (1 - q) = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) =$$

- **Formule de Pascal** :
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} =$$

Application : Montrer que
$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \leq p \leq n$$

Télescopes et formule de Pascal

- **Télescopes** :
$$\sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$$

Application :
$$\sum_{k=0}^n q^k (1 - q) = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

- **Formule de Pascal** :
$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} =$$

Application : Montrer que
$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \leq p \leq n$$

Télescopes et formule de Pascal

- **Télescopes** : $\sum_{k=0}^n (u_k - u_{k+1}) = u_0 - u_{n+1}$

Application : $\sum_{k=0}^n q^k (1 - q) = \sum_{k=0}^n (q^k - q^{k+1}) = 1 - q^{n+1}$

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

- **Formule de Pascal** : $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}$

Application : Montrer que $\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \leq p \leq n$

Table des matières

- 1 Logique et sommes usuelles
- 2 Nombres complexes et trigonométrie
- 3 Polynômes

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| =$ et $\cos(\theta) =$, $\sin(\theta) =$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| =$ et
 $\arg(z) =$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| =$ et $\arg(z) =$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$; $|z + z'| = 5$
 $|z' - z| \leq 1$; $|z + z'| \leq 5$; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| =$ et
 $\arg(z) =$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| =$ et $\arg(z) =$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$; $|z + z'| = 5$
 $|z' - z| \leq 1$; $|z + z'| \leq 5$; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| = |z_1||z_2|$ et
 $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi]$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi]$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$; $|z + z'| = 5$
 $|z' - z| \leq 1$; $|z + z'| \leq 5$; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| = |z_1||z_2|$ et
 $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$; $|z + z'| = 5$
 $|z' - z| \leq 1$; $|z + z'| \leq 5$; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| = |z_1||z_2|$ et
 $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$ (**VRAI**) ; $|z + z'| = 5$
 $|z' - z| \leq 1$; $|z + z'| \leq 5$; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| = |z_1||z_2|$ et
 $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$ (**VRAI**) ; $|z + z'| = 5$ (**FAUX**)
 $|z' - z| \leq 1$; $|z + z'| \leq 5$; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| = |z_1||z_2|$ et
 $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$ (**VRAI**) ; $|z + z'| = 5$ (**FAUX**)
 $|z' - z| \leq 1$ (**FAUX**) ; $|z + z'| \leq 5$; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| = |z_1||z_2|$ et
 $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$ (**VRAI**) ; $|z + z'| = 5$ (**FAUX**)
 $|z' - z| \leq 1$ (**FAUX**) ; $|z + z'| \leq 5$ (**VRAI**) ; $|\frac{z}{z'}| < 1$

Formes trigonométriques

- soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors $z = x + iy = |z|e^{i\theta}$ avec
 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$ et $\cos(\theta) = x/|z|$, $\sin(\theta) = y/|z|$
- Si $z = z_1 z_2$ alors $|z| = |z_1||z_2|$ et
 $\arg(z) = \arg(z_1) + \arg(z_2)[2\pi]$
- Si $z = \frac{z_1}{z_2}$ alors $|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ et $\arg(z) = \arg(z_1) - \arg(z_2)[2\pi]$
- Soit $(z, z') \in \mathbb{C}^2 / |z| = 2$ et $|z'| = 3$. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
 $|zz'| = 6$ (**VRAI**) ; $|z + z'| = 5$ (**FAUX**)
 $|z' - z| \leq 1$ (**FAUX**) ; $|z + z'| \leq 5$ (**VRAI**) ; $|\frac{z}{z'}| < 1$ (**VRAI**)

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

- ① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$;

$$z - z' , zz' , \frac{z}{z'} ?$$

- ② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$;

$$z - z' ;$$

$$zz' , \frac{z}{z'}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

- ① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ (**non**) ;

$$z - z' \quad , \quad zz' \quad \frac{z}{z'} \quad ?$$

- ② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$;

$$z - z' \quad ;$$

$$zz' \quad \frac{z}{z'}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

- ① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ (**non**) ;

$$z - z' \text{ (**non**)}, zz', \frac{z}{z'} \quad ?$$

- ② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$;

$$z - z' \quad ;$$

$$zz', \frac{z}{z'}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

- ① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ (**non**) ;

$$z - z' \text{ (**non**)}, zz' \text{ (**oui** : } \theta + \theta' \text{)} \quad \frac{z}{z'} \quad ?$$

- ② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$;
 $z - z'$;

$$zz' \quad \frac{z}{z'}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ (**non**) ;

$z - z'$ (**non**), zz' (**oui** : $\theta + \theta'$) $\frac{z}{z'}$ (**oui** : $\theta - \theta'$) ?

② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$;
 $z - z'$;

zz' $\frac{z}{z'}$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ (**non**) ;

$z - z'$ (**non**), zz' (**oui** : $\theta + \theta'$) $\frac{z}{z'}$ (**oui** : $\theta - \theta'$) ?

② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$ (**oui** : θ) ;
 $z - z'$;

zz' $\frac{z}{z'}$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ **(non)** ;

$z - z'$ **(non)**, zz' **(oui : $\theta + \theta'$)** $\frac{z}{z'}$ **(oui : $\theta - \theta'$)** ?

② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$ **(oui : θ)** ;

$z - z'$ **(non, cela dépend du signe de $(|z| - |z'|)$)** ;

$$zz' \quad \frac{z}{z'}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ **(non)** ;

$z - z'$ **(non)**, zz' **(oui : $\theta + \theta'$)** $\frac{z}{z'}$ **(oui : $\theta - \theta'$)** ?

② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$ **(oui : θ)** ;

$z - z'$ **(non, cela dépend du signe de $(|z| - |z'|)$)** ;

zz' **(oui)** $\frac{z}{z'}$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ **(non)** ;

$z - z'$ **(non)**, zz' **(oui : $\theta + \theta'$)** $\frac{z}{z'}$ **(oui : $\theta - \theta'$)** ?

② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$ **(oui : θ)** ;

$z - z'$ **(non, cela dépend du signe de $(|z| - |z'|)$)** ;

zz' **(oui)** $\frac{z}{z'}$ **(oui)**

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z =$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ **(non)** ;

$z - z'$ **(non)**, zz' **(oui : $\theta + \theta'$)** $\frac{z}{z'}$ **(oui : $\theta - \theta'$)** ?

② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$ **(oui : θ)** ;

$z - z'$ **(non, cela dépend du signe de $(|z| - |z'|)$)** ;

zz' **(oui)** $\frac{z}{z'}$ **(oui)**

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z = \begin{cases} re^{i\theta} & \text{si } r > 0 \\ -re^{i(\theta+\pi)} & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

$$z = 1 + i \tan \theta =$$

Formes trigonométriques (suite)

Soient z et z' 2 nombres complexes non nuls d'arguments θ et θ' .

① Peut-on connaître les arguments des nombres : $z + z'$ **(non)** ;

$$z - z' \text{ **(non)**, } zz' \text{ **(oui : } \theta + \theta') \text{ } \frac{z}{z'} \text{ **(oui : } \theta - \theta') \text{ ?}****$$

② Même question en supposant que $\theta = \theta'$: $z + z'$ **(oui : θ)** ;

$$z - z' \text{ **(non, cela dépend du signe de } (|z| - |z'|)) \text{ ;}**$$

$$zz' \text{ **(oui)** } \frac{z}{z'} \text{ **(oui)**}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

$$z = re^{i\theta}, r \in \mathbb{R}^* ; z = \begin{cases} re^{i\theta} & \text{si } r > 0 \\ -re^{i(\theta+\pi)} & \text{si } r < 0 \end{cases}$$

$$z = 1 + itan\theta = \begin{cases} \frac{1}{\cos(\theta)} e^{i\theta} & \text{si } \theta \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[[[2\pi] \\ -\frac{1}{\cos(\theta)} e^{i(\theta+\pi)} & \text{si } \theta \in]\frac{\pi}{2}; 3\frac{\pi}{2}[[[2\pi] \end{cases}$$

Angles usuels

Mettre sous forme algébrique :

- $e^{i\pi/2} =$; $e^{i3\pi/2} =$; $e^{i\pi} =$
- $e^{i\pi/6} =$; $e^{i\pi/3} =$
- $e^{i\pi/4} =$; $e^{3i\pi/4} =$
- $e^{2i\pi/3} =$; $e^{-i\pi/3} =$;
 $e^{-2i\pi/3} =$

Angles usuels

Mettre sous forme algébrique :

- $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i3\pi/2} = -i$; $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\pi/6} =$; $e^{i\pi/3} =$
- $e^{i\pi/4} =$; $e^{3i\pi/4} =$
- $e^{2i\pi/3} =$; $e^{-i\pi/3} =$;
 $e^{-2i\pi/3} =$

Angles usuels

Mettre sous forme algébrique :

- $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i3\pi/2} = -i$; $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\pi/6} = \sqrt{3}/2 + i/2$; $e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$
- $e^{i\pi/4} =$; $e^{3i\pi/4} =$
- $e^{2i\pi/3} =$; $e^{-i\pi/3} =$;
 $e^{-2i\pi/3} =$

Angles usuels

Mettre sous forme algébrique :

- $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i3\pi/2} = -i$; $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\pi/6} = \sqrt{3}/2 + i/2$; $e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$
- $e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$; $e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$
- $e^{2i\pi/3} =$ $= j$; $e^{-i\pi/3} =$;
 $e^{-2i\pi/3} =$

Angles usuels

Mettre sous forme algébrique :

- $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i3\pi/2} = -i$; $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\pi/6} = \sqrt{3}/2 + i/2$; $e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$
- $e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$; $e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$
- $e^{2i\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = j$; $e^{-i\pi/3} =$;
 $e^{-2i\pi/3} =$

Angles usuels

Mettre sous forme algébrique :

- $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i3\pi/2} = -i$; $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\pi/6} = \sqrt{3}/2 + i/2$; $e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$
- $e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$; $e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$
- $e^{2i\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = j$; $e^{-i\pi/3} = 1/2 - i\sqrt{3}/2 = -j$;
 $e^{-2i\pi/3} =$

Angles usuels

Mettre sous forme algébrique :

- $e^{i\pi/2} = i$; $e^{i3\pi/2} = -i$; $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\pi/6} = \sqrt{3}/2 + i/2$; $e^{i\pi/3} = 1/2 + i\sqrt{3}/2$
- $e^{i\pi/4} = \sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$; $e^{3i\pi/4} = -\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2$
- $e^{2i\pi/3} = -1/2 + i\sqrt{3}/2 = j$; $e^{-i\pi/3} = 1/2 - i\sqrt{3}/2 = -j$;
 $e^{-2i\pi/3} = -1/2 - i\sqrt{3}/2 = j^2 = \bar{j}$

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} =$
- $e^{ia} - e^{ib} =$
- $e^{ia} + 1 =$
- $e^{ia} - 1 =$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} =$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \cos a + \cos b =$
- $e^{ia} - e^{ib} =$
- $e^{ia} + 1 =$
- $e^{ia} - 1 =$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} =$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} - e^{ib} =$
- $e^{ia} + 1 =$
- $e^{ia} - 1 =$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} =$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \sin a - \sin b =$
- $e^{ia} + 1 =$
- $e^{ia} - 1 =$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} =$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} + 1 =$
- $e^{ia} - 1 =$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} =$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} + 1 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$
- $e^{ia} - 1 =$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} =$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} + 1 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$
- $e^{ia} - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} =$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules d'Euler

Rappel

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Mettre sous forme trigonométrique :

- $e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \cos a + \cos b = 2\cos\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} - e^{ib} = 2i\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)e^{i\frac{a+b}{2}} \Rightarrow \sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2} \cdot \cos\frac{a+b}{2}$
- $e^{ia} + 1 = 2\cos\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$
- $e^{ia} - 1 = 2i\sin\left(\frac{a}{2}\right)e^{i\frac{a}{2}}$
- $e^{i\pi/2} \frac{e^{-ib} - 1}{e^{-ib} + 1} = i \frac{-2i\sin(b/2)}{2\cos(b/2)} = \tan(b/2)$

Autre application, associée au binôme de Newton : **Linéarisation**

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x =$ ou encore $1 + \tan^2 x =$

- $\cos(a + b) =$;
 $\cos(a - b) =$

- $\sin(a + b) =$;
 $\sin(a - b) =$

- $\tan(a + b) =$; $\tan(a - b) =$

- $\sin 2a =$;
 $\cos 2a =$

- $\sin a \cdot \cos b =$

- $\sin a \cdot \sin b =$

- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) =$;
 $\cos(a - b) =$
- $\sin(a + b) =$;
 $\sin(a - b) =$
- $\tan(a + b) =$; $\tan(a - b) =$
- $\sin 2a =$;
 $\cos 2a =$
- $\sin a \cdot \cos b =$
- $\sin a \cdot \sin b =$
- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) =$;
 $\sin(a - b) =$
- $\tan(a + b) =$; $\tan(a - b) =$
- $\sin 2a =$;
 $\cos 2a =$
- $\sin a \cdot \cos b =$
- $\sin a \cdot \sin b =$
- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) =$; $\tan(a - b) =$
- $\sin 2a =$;
 $\cos 2a =$
- $\sin a \cdot \cos b =$
- $\sin a \cdot \sin b =$
- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$; $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
- $\sin 2a =$;
 $\cos 2a =$
- $\sin a \cdot \cos b =$
- $\sin a \cdot \sin b =$
- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$; $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin a \cdot \cos b =$
- $\sin a \cdot \sin b =$
- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$; $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\sin a \cdot \sin b =$
- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$; $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- $\cos a \cdot \cos b =$

Formules trigo

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ou encore $1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$;
 $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$;
 $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$
- $\tan(a + b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$; $\tan(a - b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$
- $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$;
 $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$
- $\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a + b) + \sin(a - b)]$
- $\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$
- $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a + b) + \cos(a - b)]$

racines n-ièmes de l'unité

- ① Les racines carrées de l'unité sont :
- ② Les racines cubiques de l'unité sont :

Propriétés : $1 + j + j^2 = 0$; $\forall p \in \mathbb{N}, j^{3p} = 1, j^{3p+1} = j$ et $j^{3p+2} = j^2$

racines n-ièmes de l'unité

- ① Les racines carrées de l'unité sont : 1 et -1
- ② Les racines cubiques de l'unité sont :

Propriétés : $1 + j + j^2 = 0$; $\forall p \in \mathbb{N}, j^{3p} = 1, j^{3p+1} = j$ et $j^{3p+2} = j^2$

racines n-ièmes de l'unité

- ① Les racines carrées de l'unité sont : 1 et -1
- ② Les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et j^2 avec

$$j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et}$$

$$j^2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

Propriétés : $1 + j + j^2 = 0$; $\forall p \in \mathbb{N}, j^{3p} = 1, j^{3p+1} = j$ et $j^{3p+2} = j^2$

racines n-ièmes de l'unité

- ① Les racines carrées de l'unité sont : 1 et -1
- ② Les racines cubiques de l'unité sont : 1, j et j^2 avec

$$j = e^{2i\pi/3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et}$$
$$j^2 = e^{4i\pi/3} = e^{-2i\pi/3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$$

Propriétés : $1 + j + j^2 = 0$; $\forall p \in \mathbb{N}, j^{3p} = 1, j^{3p+1} = j$ et $j^{3p+2} = j^2$

racines carrées d'un nombre complexe

Un exemple : Résoudre de deux manières différentes $z^2 = j$

- Méthode trigonométrique : $z = re^{i\theta}, r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$
- Méthode algébrique : On pose $z = a + ib, (a, b) \in \mathbb{R}^2$

racines carrées d'un nombre complexe

Un exemple : Résoudre de deux manières différentes $z^2 = j$

- Méthode trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

$$z^2 = j \Leftrightarrow r^2 e^{2i\theta} = e^{2i\pi/3} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r^2 = 1 \\ 2\theta = 2\pi/3 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi/3 + k\pi, 0 \leq k < 2 \end{cases}$$

- Méthode algébrique : On pose $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

racines carrées d'un nombre complexe

Un exemple : Résoudre de deux manières différentes $z^2 = j$

- Méthode trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

$$z^2 = j \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi/3 + k\pi, 0 \leq k < 2 \end{cases};$$

Concl. : $\mathcal{S} = \{e^{i\pi/3}, e^{4i\pi/3} = j^2\}$

- Méthode algébrique : On pose $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

racines carrées d'un nombre complexe

Un exemple : Résoudre de deux manières différentes $z^2 = j$

- Méthode trigonométrique : $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

$$z^2 = j \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \pi/3 + k\pi, 0 \leq k < 2 \end{cases};$$

Concl. : $\mathcal{S} = \{e^{i\pi/3}, e^{4i\pi/3} = j^2\}$

- Méthode algébrique : On pose $z = a + ib$, $(a, b) \in \mathbb{R}^2$

$$z^2 = j \Leftrightarrow (a + ib)^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ a^2 - b^2 = -1/2 \\ ab > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} a^2 = 1/4 \\ b^2 = 3/4, ab > 0 \end{cases}; \text{ **Concl.** : } \mathcal{S} = \{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\}$$

Equations du second degré à coefficients réels

Résoudre les équations suivantes :

- $z^2 + z + 1 = 0$
- $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$
- $z^2 - 2z + 5 = 0$
- $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 2\left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 5 = 0$

Equations du second degré à coefficients réels

Résoudre les équations suivantes :

- $z^2 + z + 1 = 0$; Deux racines évidentes j et $\bar{j}$
- $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$
- $z^2 - 2z + 5 = 0$
- $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 2\left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 5 = 0$

Equations du second degré à coefficients réels

Résoudre les équations suivantes :

- $z^2 + z + 1 = 0$; Deux racines évidentes j et $\bar{j}$
- $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ $\Delta < 0$; $\mathcal{S} = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$
- $z^2 - 2z + 5 = 0$
- $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 2\left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 5 = 0$

Equations du second degré à coefficients réels

Résoudre les équations suivantes :

- $z^2 + z + 1 = 0$; Deux racines évidentes j et $\bar{j}$
- $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ $\Delta < 0$; $\mathcal{S} = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$
- $z^2 - 2z + 5 = 0$ $\Delta = (4i)^2$; $\mathcal{S} = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$
- $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 2\left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 5 = 0$

Equations du second degré à coefficients réels

Résoudre les équations suivantes :

- $z^2 + z + 1 = 0$; Deux racines évidentes j et $\bar{j}$
- $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ $\Delta < 0$; $\mathcal{S} = \{e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$
- $z^2 - 2z + 5 = 0$ $\Delta = (4i)^2$; $\mathcal{S} = \{1 + 2i, 1 - 2i\}$
- $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 - 2\left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 5 = 0$

D'après ce qui précède, $\frac{z+i}{z-i} = 1 + 2i$ ou $\frac{z+i}{z-i} = 1 - 2i$.

On note que $z = i$ n'est pas solution. On peut donc multiplier par $z - i$, soit :

$$z + i = (1 + 2i)(z - i) \text{ ou } z + i = (1 - 2i)(z - i)$$

Concl : $\mathcal{S} = \{1 + i, -1 + i\}$

Déterminer les racines cubiques d'un nombre complexe

Résoudre $z^3 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.

Commencer par déterminer une racine évidente z_0 pour laquelle $z_0^3 = a$. Alors $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, j, \bar{j}\}$

Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ (*)

- On pose $Z = z^3$. Alors $(*) \Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 2 = 0$

- Réolvons (E2) : $z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Une racine évidente est

- Les coefficients de l'équation polynomiale (*) étant réels, les racines sont conjuguées deux à deux. Ce qui permet de conclure :

Déterminer les racines cubiques d'un nombre complexe

Résoudre $z^3 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.

Commencer par déterminer une racine évidente z_0 pour laquelle $z_0^3 = a$. Alors $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, j, \bar{j}\}$

Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ (*)

- On pose $Z = z^3$. Alors $(*) \Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 2 = 0$
 $\Delta = -4$ donc deux racines $Z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$
 $(*) \Leftrightarrow z^3 = 1 - i$ (E1) ou $z^3 = 1 + i$ (E2)
- Réolvons (E2) : $z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Une racine évidente est

- Les coefficients de l'équation polynomiale (*) étant réels, les racines sont conjuguées deux à deux. Ce qui permet de conclure :

Déterminer les racines cubiques d'un nombre complexe

Résoudre $z^3 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.

Commencer par déterminer une racine évidente z_0 pour laquelle $z_0^3 = a$. Alors $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, j, \bar{j}\}$

Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ (*)

- On pose $Z = z^3$. Alors $(*) \Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 2 = 0$

$\Delta = -4$ donc deux racines $Z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$(*) \Leftrightarrow z^3 = 1 - i$ (E1) ou $z^3 = 1 + i$ (E2)

- Réolvons (E2) : $z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Une racine évidente est $z_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\pi/12}$.

- Les coefficients de l'équation polynomiale (*) étant réels, les racines sont conjuguées deux à deux. Ce qui permet de conclure :

Déterminer les racines cubiques d'un nombre complexe

Résoudre $z^3 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.

Commencer par déterminer une racine évidente z_0 pour laquelle

$$z_0^3 = a. \text{ Alors } z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, j, \bar{j}\}$$

Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ (*)

- On pose $Z = z^3$. Alors $(*) \Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 2 = 0$

$$\Delta = -4 \text{ donc deux racines } Z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$$

$$(*) \Leftrightarrow z^3 = 1 - i \text{ (E1) ou } z^3 = 1 + i \text{ (E2)}$$

- Réolvons (E2) : $z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

$$\text{Une racine évidente est } z_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\pi/12}. \text{ D'où (E2)} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$$

$$\text{Concl : } z = z_0 \text{ ou } z = jz_0 \text{ ou } z = \bar{j}z_0$$

- Les coefficients de l'équation polynomiale (*) étant réels, les racines sont conjuguées deux à deux. Ce qui permet de conclure :

Déterminer les racines cubiques d'un nombre complexe

Résoudre $z^3 = a$ où $a \in \mathbb{C}$.

Commencer par déterminer une racine évidente z_0 pour laquelle $z_0^3 = a$. Alors $z^3 = z_0^3 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1 \Leftrightarrow \frac{z}{z_0} \in \{1, j, \bar{j}\}$

Application : Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6 - 2z^3 + 2 = 0$ (*)

- On pose $Z = z^3$. Alors $(*) \Leftrightarrow Z^2 - 2Z + 2 = 0$

$\Delta = -4$ donc deux racines $Z = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i$

$(*) \Leftrightarrow z^3 = 1 - i$ (E1) ou $z^3 = 1 + i$ (E2)

- Réolvons (E2) : $z^3 = 1 + i = \sqrt{2}e^{i\pi/4}$.

Une racine évidente est $z_0 = 2^{\frac{1}{6}}e^{i\pi/12}$. D'où (E2) $\Leftrightarrow \left(\frac{z}{z_0}\right)^3 = 1$

Concl : $z = z_0$ ou $z = jz_0$ ou $z = \bar{j}z_0$

- Les coefficients de l'équation polynomiale (*) étant réels, les racines sont conjuguées deux à deux. Ce qui permet de conclure : $\mathcal{S} = \{z_0, jz_0, \bar{j}z_0, \bar{z}_0, \bar{j}\bar{z}_0, j\bar{z}_0\}$

Quelques sommes usuelles

- $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) =$
- $S_2 = \sum_{k=0}^n \cos(kx) =$

Quelques sommes usuelles

- $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = \operatorname{Re} (1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$
- $S_2 = \sum_{k=0}^n \cos(kx) =$

Quelques sommes usuelles

- $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = \operatorname{Re} (1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$
- $S_2 = \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k \right)$
Si $e^{ix} = 1$, càd $x = 0[2\pi]$, alors $S_1 = n + 1$.

Quelques sommes usuelles

- $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = \operatorname{Re} (1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$
- $S_2 = \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k \right)$

Si $e^{ix} = 1$, càd $x = 0[2\pi]$, alors $S_1 = n + 1$.

Si $e^{ix} \neq 1$, càd $x \neq 0[2\pi]$, alors :

$$S_2 = \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(-2i \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)}$$

Quelques sommes usuelles

- $S_1 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx) = \operatorname{Re} (1 + e^{ix})^n = 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{nx}{2}\right)$
- $S_2 = \sum_{k=0}^n \cos(kx) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ikx} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n (e^{ix})^k \right)$

Si $e^{ix} = 1$, càd $x = 0[2\pi]$, alors $S_1 = n + 1$.

Si $e^{ix} \neq 1$, càd $x \neq 0[2\pi]$, alors :

$$S_2 = \operatorname{Re} \frac{1 - e^{i(n+1)x}}{1 - e^{ix}} = \operatorname{Re} \frac{e^{i\frac{(n+1)x}{2}} \left(-2i \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \right)}{e^{i\frac{x}{2}} \left(-2i \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right)}$$

Conclusion : $S_1 = \frac{\cos\left(\frac{nx}{2}\right) \sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$

Table des matières

- 1 Logique et sommes usuelles
- 2 Nombres complexes et trigonométrie
- 3 Polynômes

Dérivation et degré d'un polynôme

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $a_p \neq 0$. Alors :

$$P'(X) =$$

- Si $\deg(P) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\deg(P^{(k)}) =$$

- Donner la dérivée k -ième de X^n :

Dérivation et degré d'un polynôme

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $a_p \neq 0$. Alors :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1}$$

- Si $\deg(P) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\deg(P^{(k)}) =$$

- Donner la dérivée k -ième de X^n :

Dérivation et degré d'un polynôme

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $a_p \neq 0$. Alors :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1}$$

- Si $\deg(P) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\deg(P^{(k)}) = \begin{cases} n - k & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ -\infty & \text{si } k > n \end{cases}$$

- Donner la dérivée k -ième de X^n :

Dérivation et degré d'un polynôme

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $a_p \neq 0$. Alors :

$$P'(X) = \sum_{k=1}^p k a_k X^{k-1}$$

- Si $\deg(P) = n$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors, $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\deg(P^{(k)}) = \begin{cases} n - k & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ -\infty & \text{si } k > n \end{cases}$$

- Donner la dérivée k -ième de X^n :

$$(X^n)^{(k)} = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!} X^{n-k} & \text{si } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) =$;
 $\deg(P + Q)$

- $\deg(AP') =$; $\deg(BP) =$
Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP)$
- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q)$

- $\deg(AP') =$; $\deg(BP) =$
Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP)$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

- $\deg(AP') =$; $\deg(BP) =$
Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP)$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

Application : Soit $A(X) = aX^n, B(X) = bX^{n-1}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ et
 $P \in \mathbb{R}[X]/\deg(P) = p$

- $\deg(AP') =$; $\deg(BP) =$
 Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP)$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

Application : Soit $A(X) = aX^n$, $B(X) = bX^{n-1}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ et
 $P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = p$

- $\deg(AP') =$; $\deg(BP) =$
 Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP)$?

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k$, $a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

Application : Soit $A(X) = aX^n, B(X) = bX^{n-1}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ et
 $P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = p$

- $\deg(AP') = n + p - 1; \deg(BP) = n + p - 1$
 Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP)$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

Application : Soit $A(X) = aX^n, B(X) = bX^{n-1}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ et
 $P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = p$

- $\deg(AP') = n + p - 1; \deg(BP) = n + p - 1$
 Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP) \leq n + p - 1$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

Application : Soit $A(X) = aX^n, B(X) = bX^{n-1}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ et
 $P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = p$

- $\deg(AP') = n + p - 1; \deg(BP) = n + p - 1$
 Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP) \leq n + p - 1$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

Application : Soit $A(X) = aX^n, B(X) = bX^{n-1}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ et
 $P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = p$

- $\deg(AP') = n + p - 1; \deg(BP) = n + p - 1$
 Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP) \leq n + p - 1$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

D'où $AP' + BP = (apa_p + ba_p)X^{n+p-1} + R(X)$ où
 $\deg(R) \leq n + p - 2$

degré d'une somme, d'un produit

Rappel : $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \deg(P \cdot Q) = \deg(P) + \deg(Q);$
 $\deg(P + Q) \leq \max(\deg(P), \deg(Q));$

Application : Soit $A(X) = aX^n, B(X) = bX^{n-1}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^*$ et
 $P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) = p$

- $\deg(AP') = n + p - 1; \deg(BP) = n + p - 1$
 Que peut-on dire de $\deg(AP' + BP) \leq n + p - 1$

- Précisons : On pose $P(X) = \sum_{k=0}^p a_k X^k, a_p \neq 0$

D'où $AP' + BP = (apa_p + ba_p)X^{n+p-1} + R(X)$ où
 $\deg(R) \leq n + p - 2$

conclusion : $\deg(AP' + BP) = \begin{cases} n + p - 1 & \text{si } ap + b \neq 0 \\ n + p - 2 & \text{si } ap + b = 0 \end{cases}$

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) =$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : ;
- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : ;
- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : ;
- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : $a_k = P^{(k)}(0)/k!$;
- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : $a_k = P^{(k)}(0)/k!$;
- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : $a_k = P^{(k)}(0)/k!$;

- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (X-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-1)^k.$$

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : $a_k = P^{(k)}(0)/k!$;
- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (X-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-1)^k$$
 Ne pouvait-on pas retrouver autrement ce résultat ?

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : $a_k = P^{(k)}(0)/k!$;

- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (X-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-1)^k. \text{ Ne}$$

pouvait-on pas retrouver autrement ce résultat ?

Oui...

Formule de Taylor

Rappel :

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n . Alors pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$

$$P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X - \alpha)^k$$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Exprimer pour tout $0 \leq k \leq n$, a_k en

fonction de la dérivée k -ième de P en 0 : $a_k = P^{(k)}(0)/k!$;

- Soit $P(X) = X^n$. Exprimer la formule de Taylor pour $\alpha = 1$:

$$X^n = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} (X-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (X-1)^k. \text{ Ne}$$

pouvait-on pas retrouver autrement ce résultat ?

Oui... $X^n = (X-1+1)^n$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta =$; $\alpha \cdot \beta =$
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
 Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 =$; $\alpha_1 \alpha_2 =$
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 =$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 =$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.
 Alors : $\sum_{i=1}^n \alpha_i =$; $\prod_{i=1}^n \alpha_i =$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta =$; $\alpha \cdot \beta =$
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 =$; $\alpha_1 \alpha_2 =$
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 =$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 =$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.
Alors : $\sum_{i=1}^n \alpha_i =$; $\prod_{i=1}^n \alpha_i =$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta =$; $\alpha \cdot \beta =$
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 =$; $\alpha_1 \alpha_2 =$
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 =$ et $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 =$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.
Alors : $\sum_{i=1}^n \alpha_i =$; $\prod_{i=1}^n \alpha_i =$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta = -b$; $\alpha \cdot \beta = c$.
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 =$; $\alpha_1 \alpha_2 =$
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 =$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 =$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.
Alors : $\sum_{i=1}^n \alpha_i =$; $\prod_{i=1}^n \alpha_i =$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta = -b$; $\alpha \cdot \beta = c$.
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 =$; $\alpha_1 \alpha_2 =$
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 =$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 =$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.
Alors : $\sum_{i=1}^n \alpha_i =$; $\prod_{i=1}^n \alpha_i =$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta = -b$; $\alpha \cdot \beta = c$.
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1/a_2$; $\alpha_1 \alpha_2 = a_0/a_2$.
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 =$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 =$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n \alpha_i = \quad ; \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i =$$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta = -b$; $\alpha \cdot \beta = c$.
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1/a_2$; $\alpha_1 \alpha_2 = a_0/a_2$.
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 =$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 =$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 =$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n \alpha_i = \quad ; \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i =$$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta = -b$; $\alpha \cdot \beta = c$.
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1/a_2$; $\alpha_1 \alpha_2 = a_0/a_2$.
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_2/a_3$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = a_1/a_3$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -a_0/a_3$

- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n \alpha_i = \quad ; \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i =$$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta = -b$; $\alpha \cdot \beta = c$.
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1/a_2$; $\alpha_1 \alpha_2 = a_0/a_2$.
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_2/a_3$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = a_1/a_3$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -a_0/a_3$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n \alpha_i = \quad ; \quad \prod_{i=1}^n \alpha_i =$$

Racines d'un polynôme

- Soit $P(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C}$, a-t-on toujours $P(\bar{\alpha}) = 0$?
Non, sauf si $P \in \mathbb{R}[X]$
- Soit $P(X) = X^2 + bX + c$ de racines dans $\mathbb{C}$, α et β . Alors :
 $\alpha + \beta = -b$; $\alpha \cdot \beta = c$.
- Soit $P(X) = a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 et α_2 .
Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1/a_2$; $\alpha_1 \alpha_2 = a_0/a_2$.
- Soit $P(X) = a_3X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_1 , α_2 et α_3 . Alors : $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -a_2/a_3$;
 $\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = a_1/a_3$ et $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = -a_0/a_3$
- Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ de racines dans $\mathbb{C}$, α_i , $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Alors : } \sum_{i=1}^n \alpha_i = -a_{n-1}/a_n; \prod_{i=1}^n \alpha_i = (-1)^n P(0)/a_n$$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$
- $P_2(X) = X^2 + 4$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$; $P_1 = (X - 1)(X + 1)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_2(X) = X^2 + 4$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$; $P_1 = (X - 1)(X + 1)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_2(X) = X^2 + 4$; $P_2 = (X - 2i)(X + 2i)$ dans $\mathbb{C}$ et
 $P_2(X) = X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$; $P_1 = (X - 1)(X + 1)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_2(X) = X^2 + 4$; $P_2 = (X - 2i)(X + 2i)$ dans $\mathbb{C}$ et
 $P_2(X) = X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$; $P_3 = 2(X - 1)^2$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$; $P_1 = (X - 1)(X + 1)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_2(X) = X^2 + 4$; $P_2 = (X - 2i)(X + 2i)$ dans $\mathbb{C}$ et
 $P_2(X) = X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$; $P_3 = 2(X - 1)^2$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$; $P_4 = 2(X - 1)(X - \frac{1}{2})$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$; $P_1 = (X - 1)(X + 1)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_2(X) = X^2 + 4$; $P_2 = (X - 2i)(X + 2i)$ dans $\mathbb{C}$ et
 $P_2(X) = X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$; $P_3 = 2(X - 1)^2$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$; $P_4 = 2(X - 1)(X - \frac{1}{2})$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$
 $(X - 1)(X + 1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})(X - e^{2i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-2i\frac{\pi}{3}})$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$; $P_1 = (X - 1)(X + 1)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_2(X) = X^2 + 4$; $P_2 = (X - 2i)(X + 2i)$ dans $\mathbb{C}$ et
 $P_2(X) = X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$; $P_3 = 2(X - 1)^2$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$; $P_4 = 2(X - 1)(X - \frac{1}{2})$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$
 $(X - 1)(X + 1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})(X - e^{2i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-2i\frac{\pi}{3}})$
Soit $P_5(X) =$

Décomposition d'un polynôme

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$

- $P_1(X) = X^2 - 1$; $P_1 = (X - 1)(X + 1)$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_2(X) = X^2 + 4$; $P_2 = (X - 2i)(X + 2i)$ dans $\mathbb{C}$ et
 $P_2(X) = X^2 + 4$ dans $\mathbb{R}$
- $P_3(X) = 2X^2 - 4X + 2$; $P_3 = 2(X - 1)^2$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_4(X) = 2X^2 - 3X + 1$; $P_4 = 2(X - 1)(X - \frac{1}{2})$ dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$
- $P_5(X) = X^6 - 1 =$
 $(X - 1)(X + 1)(X - e^{i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-i\frac{\pi}{3}})(X - e^{2i\frac{\pi}{3}})(X - e^{-2i\frac{\pi}{3}})$
Soit $P_5(X) = (X - 1)(X + 1)(X^2 - X + 1)(X^2 + X + 1)$

racines multiples

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet a pour racine multiple d'ordre r si :
 $\exists Q \in \mathbb{K}[X]/P(X) = (X - a)^r Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$
 $P(a) = 0 = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a)$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

Application : Soit $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Montrer que j est racine double de P :

Conséquence ?

- Donner deux racines évidentes de P : . Quel est leur ordre de multiplicité ?
- Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$:
Dans $\mathbb{C}$,
Dans $\mathbb{R}$,

racines multiples

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet a pour racine multiple d'ordre r si :
 $\exists Q \in \mathbb{K}[X]/P(X) = (X - a)^r Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$
 $P(a) = 0 = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a)$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

Application : Soit $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Montrer que j est racine double de P : On note que
 $P'(X) = 7[(X + 1)^6 - X^6]$. D'où $P(j) = P'(j) = 0$ C.Q.F.D.
 Conséquence ?
- Donner deux racines évidentes de P : . Quel est leur ordre de multiplicité ?
- Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$:
 Dans $\mathbb{C}$,
 Dans $\mathbb{R}$,

racines multiples

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet a pour racine multiple d'ordre r si :
 $\exists Q \in \mathbb{K}[X]/P(X) = (X - a)^r Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$
 $P(a) = 0 = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a)$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

Application : Soit $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Montrer que j est racine double de P : On note que
 $P'(X) = 7[(X + 1)^6 - X^6]$. D'où $P(j) = P'(j) = 0$ C.Q.F.D.
 Conséquence ? $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $j^2 = \bar{j}$ est racine double de P .
- Donner deux racines évidentes de P : . Quel est leur ordre de multiplicité ?
- Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$:
 Dans $\mathbb{C}$,
 Dans $\mathbb{R}$,

racines multiples

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet a pour racine multiple d'ordre r si :
 $\exists Q \in \mathbb{K}[X]/P(X) = (X - a)^r Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$
 $P(a) = 0 = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a)$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

Application : Soit $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Montrer que j est racine double de P : On note que
 $P'(X) = 7[(X + 1)^6 - X^6]$. D'où $P(j) = P'(j) = 0$ C.Q.F.D.
 Conséquence ? $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $j^2 = \bar{j}$ est racine double de P .
- Donner deux racines évidentes de P : 0 et -1 . Quel est leur ordre de multiplicité ?
- Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$:
 Dans $\mathbb{C}$,
 Dans $\mathbb{R}$,

racines multiples

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet a pour racine multiple d'ordre r si :
 $\exists Q \in \mathbb{K}[X]/P(X) = (X - a)^r Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$
 $P(a) = 0 = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a)$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

Application : Soit $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Montrer que j est racine double de P : On note que
 $P'(X) = 7[(X + 1)^6 - X^6]$. D'où $P(j) = P'(j) = 0$ C.Q.F.D.
 Conséquence ? $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $j^2 = \bar{j}$ est racine double de P .
- Donner deux racines évidentes de P : 0 et -1 . Quel est leur ordre de multiplicité ? P admet 6 racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur ordre de multiplicité. Donc **racines simples**.
- Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$:
 Dans $\mathbb{C}$,
 Dans $\mathbb{R}$,

racines multiples

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet a pour racine multiple d'ordre r si :
 $\exists Q \in \mathbb{K}[X]/P(X) = (X - a)^r Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$
 $P(a) = 0 = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a)$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

Application : Soit $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Montrer que j est racine double de P : On note que
 $P'(X) = 7[(X + 1)^6 - X^6]$. D'où $P(j) = P'(j) = 0$ C.Q.F.D.
 Conséquence ? $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $j^2 = \bar{j}$ est racine double de P .
- Donner deux racines évidentes de P : 0 et -1 . Quel est leur ordre de multiplicité ? P admet 6 racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur ordre de multiplicité. Donc **racines simples**.
- Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$:
 Dans $\mathbb{C}$, $P(X) = 7X(X + 1)(X - j)^2(X - \bar{j})^2$
 Dans $\mathbb{R}$,

racines multiples

Rappel : $P \in \mathbb{K}[X]$. P admet a pour racine multiple d'ordre r si :
 $\exists Q \in \mathbb{K}[X]/P(X) = (X - a)^r Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$
 $P(a) = 0 = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a)$ et $P^{(r)}(a) \neq 0$

Application : Soit $P(X) = (X + 1)^7 - X^7 - 1$.

- Montrer que j est racine double de P : On note que
 $P'(X) = 7[(X + 1)^6 - X^6]$. D'où $P(j) = P'(j) = 0$ C.Q.F.D.
 Conséquence ? $P \in \mathbb{R}[X]$ donc $j^2 = \bar{j}$ est racine double de P .
- Donner deux racines évidentes de P : 0 et -1 . Quel est leur ordre de multiplicité ? P admet 6 racines dans $\mathbb{C}$, comptées avec leur ordre de multiplicité. Donc **racines simples**.
- Factoriser P dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$:
 Dans $\mathbb{C}$, $P(X) = 7X(X + 1)(X - j)^2(X - \bar{j})^2$
 Dans $\mathbb{R}$, $P(X) = 7X(X + 1)(X^2 + X + 1)^2$

Montrer que Q divise P

Méthode :

Montrer que **les** racines de Q sont **des** racines de P

Application :

- Comment montre-t-on que $P \in \mathbb{R}[X]$ est divisible par $Q(X) = X^2 - (a + b)X + ab$?

Montrer que Q divise P

Méthode :

Montrer que **les** racines de Q sont **des** racines de P

Application :

- Comment montre-t-on que $P \in \mathbb{R}[X]$ est divisible par $Q(X) = X^2 - (a + b)X + ab$?
Les racines de Q sont $x_1 = a$ et $x_2 = b$. Il suffit donc pour conclure de montrer que $P(a) = 0 = P(b)$