14 Couples de V.A.R. discrètes.

- Loi conjointe d'un couple (X, Y) de deux variables aléatoires discrètes positives.
- Lois marginales, lois conditionnelles. Indépendance
- Théorème de transfert. Espérance de $u(X, Y)$ pour une fonction u positive.
- Lois de $u(X, Y)$. Plus particulièrement loi de $max(X, Y)$, $min(X, Y)$ et $X + Y$.

Exercice 1 : ✶

On considère n urnes numérotées de 1 à n. L'urne k contient k boules numérotées de 1 à k.
On choisit au hasard une urne puis une boule de cette urne. Soit X le numéro de l'urne et Y le numéro de la boule.
Déterminer :

① La loi du couple (X, Y).

② $\mathbb{P}(X = Y)$.

③ La loi de Y et son espérance.

Exercice 2 : ✶

Mr Henri, le voisin de Manu, possède un troupeau de vaches maraîchines. Le nombre N de naissances annuelles suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 12$ et la probabilité que ce soit une génisse vaut $p = 0,52$.

Soit X le nombre de femelles nées dans l'année et Y le nombre de mâles.

① Montrer que X suit une loi de Poisson. En déduire la loi de Y.

② Déterminer la loi du couple (X, Y). Mr. Henri soutient que le nombre de naissances mâles et femelles sont indépendants. Manu n'est pas convaincu. Qui a raison ?

③ Calculer la covariance entre X et N.

Exercice 3 : ✶

Soient $X_1, \cdots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes qui suivent toutes une loi exponentielle de paramètre λ.
On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

① Déterminer par récurrence une densité ainsi que la fonction de répartition de S_n.

② Montrer que $\mathbb{P}(S_1 > 1) = e^{-\lambda}$ et pour tout $n \geq 2$, $\mathbb{P}(S_n \leq 1 < S_{n+1}) = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$

③ En déduire une fonction Python permettant de simuler les réalisations d'une variable aléatoire qui suit une loi de poisson de paramètre λ. Proposez des méthodes statistiques permettant de valider la qualité de votre simulation.

Exercice 4 : ✶✶✶ Oral Agro-véto 2008

Soit $X_1, X_2, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, de même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
On pose $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$

① Déterminer $S_n(\Omega)$ et montrer que : $\forall k \in S_n(\Omega)$, $\mathbb{P}(S_n = k) = \dbinom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$ (Loi de *Pascal*)

② **a.** Montrer que S_n admet une espérance et la calculer.

b. En déduire que : $\forall x \in]0,1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{\infty} \binom{k}{n} x^k = \frac{x^n}{(1-x)^{n+1}}$

③ **a.** Montrer que la variable $\dfrac{1}{S_n}$ a une espérance qu'on note m.

b. Soit n et k deux entiers de $\mathbb{N}^*$ tels que $k > n$. Calculer $\mathbb{E}\left(\dfrac{S_k}{S_n}\right)$ en fonction de n, p, k et m.

Exercice 5 : ✶✶✶ Oral Agro-véto 2006

Trois personnes A_1, A_2 et A_3 entrent en même temps dans un bureau de poste, juste avant la fermeture. Il n'y a que deux guichets et ils sont libres. A_1 se présente au guichet 1, A_2 se présente au guichet 2 et A_3 attend qu'un guichet se libère. Si les deux guichets se libèrent en même temps, A_3 se présente au guichet 1.
Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on note X_i la variable aléatoire représentant le nombre d'unités de temps nécessaires pour servir le client A_i. On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2, X_3 sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ et indépendantes, et qu'elles suivent la même loi de la forme :

$$\forall n \geq 1,\ \mathbb{P}(X_i = n) = pq^{n-1},\ 0 < p < 1,\ q = 1-p$$

① **a.** Calculer, pour tout entier $n \geq 0$, la probabilité $\mathbb{P}(X_1 - X_2 = n)$. En déduire la loi de la variable aléatoire $T = |X_1 - X_2|$.

b. Que représente l'événement $(X_3 > T)$? Calculer la probabilité de cet événement.

② Pour $j \in \{1,2\}$, on note T_j le temps écoulé entre l'arrivée des clients dnas le bureau de poste et la fermeture du guichet j. On a, par exemple, $T_1 = X_1$ si $(X_1 > X_2)$ est réalisé et $T_1 = X_1 + X_3$ si $(X_1 \leq X_2)$ est réalisé.

a. Calculer $\mathbb{P}(X_1 \leq X_2)$.

b. Calculer, pour tout entier $n \geq 1$, $\mathbb{P}(T_1 - X_1 = n)$.

Exercice 6 : ✶✶✶ Oral Agro-véto 2017

Soit N un entier supérieur ou égal à 3. Une urne contient N boules dont $N-2$ sont blanches et 2 sont noires. On tire au hasard, une par une et sans remise, les N boules de cette urne. Les tirages étant numérotés de 1 à N, on note X_1 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la première fois, une boule noire et X_2 la variable aléatoire égale au numéro du tirage qui a fourni, pour la deuxième fois, une boule noire.

① Dans le cas où $N = 10$, simuler informatiquement une expérience et afficher les valeurs prises par X_1 et X_2. On rappelle à cet effet que la fonction `random()` de la bibliothèque Python `random` renvoie un nombre pseudo-aléatoire que l'on peut supposer uniformément distribué entre 0 et 1.

② Soient i et j deux entiers de l'intervalle $[\![1,N]\!]$. Montrer que la loi du couple $(X;Y)$ est donnée par :

$$\mathbb{P}((X_1=i)\cap(X_2=j)) = \begin{cases} 0 & \text{si} 1 \leq j \leq i \leq N \\ \dfrac{2}{N(N-1)} & \text{si} 1 \leq i < j \leq N \end{cases}$$

③ **a.** Justifier que les lois de X_1 et X_2 sont données par :

$$\forall k \in [\![1,N-1]\!], \mathbb{P}(X_1=k) = \frac{2(N-k)}{N(N-1)} \text{ et} \forall k \in [\![2,N]\!], \mathbb{P}(X_2=k) = \frac{2(k-1)}{N(N-1)}.$$

b. Ces variables sont-elles indépendantes ?

④ Démontrer que la variable $N+1-X_2$ a même loi que X_1.

⑤ On suppose que A et B sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathcal{P})$, indépendantes, suivant la même loi uniforme sur l'ensemble $[\![1,N]\!]$ et on désigne par D l'événement : « A ne prend pas la même valeur que B ».

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est égale à $\dfrac{N-1}{N}$.

b. On définit les variables aléatoires $Y_1 = \min(A;B)$ et $Y_2 = \max(A;B)$. Calculer, pour tout couple $(i;j)$ de $[\![1,N]\!]$ la probabilité conditionnelle :

$$\mathbb{P}_D((Y_1=i)\cap(Y_2=j)).$$

c. Expliquer pourquoi le programme suivant permet de simuler des variables aléatoires qui suivent les mêmes lois que X_1 et X_2 dans le cas où $N=10$:

```
from random import *
a= randint (1 ,10)
b= randint (1 ,10)
while a==b :
   b= randint (1 ,10)
print (min(a,b))
texttprint (max(a,b))
```