13 Variables aléatoires réelles discrètes.

- Loi de probabilité et fonction de répartition d'une variable aléatoire discrète.
- Espérance ; Propriétés ; Théorème de transfert.
- Inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments, propriétés.
- Lois discrètes usuelles. Loi de Poisson. Espérance. Variance.
- Loi géométrique. Espérance et variance. Propriété d'invariance temporelle.

Exercice 1 : ✶ *Tirage sans remise : rang d'apparition du premier succès*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules dont une seule boule blanche. On y effectue des tirages successifs et sans remise jusqu'à obtenir la boule blanche. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

① Déterminer la loi de X

② Calculer l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 :✶ Loi de Benford

Soit $d \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = [\![1, d-1]\!]$ et dont la fonction de répartition F_X vérifie : $\forall k \in [\![1, d-1]\!]$, $F_X(k) = a \ln(k+1)$ avec $a \in \mathbb{R}$.

① En considérant $F_X(d-1)$, déterminer les valeurs de a.

② Que vaut $F_X(0)$?

③ Déterminer la loi de X, appelée *loi de Benford* en base d.

Exercice 3 : ✶✶

On considère une variable aléatoire X telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{4}{n}\mathbb{P}(X = n-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Déterminer la loi de X ainsi que son espérance et sa variance, si elles existent.

Exercice 4 ✶ :

Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire telle que $X(\Omega) = \{x_n = 2n+1, n \in \mathbb{N}\}$ et vérifiant pour tout $x_n \in X(\Omega)$:

$$\mathbb{P}(X = x_n) = \alpha p^{x_n} \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}$$

① Calculer la valeur de α en fonction de p pour qu'on définisse ainsi une loi de probabilité.

② Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X > 2n) = \mathbb{P}(X > 2n-1) = p^{2n}$.

③ On pose $Y = \dfrac{X+1}{2}$.

a. Quelle est la loi suivie par Y ?
b. En déduire l'existence et la valeur de $\mathbb{E}(X)$ et de $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 5 : ✶✶

On suppose que le nombre de clients N_t qui entrent dans un certain magasin pendant une unité de temps t ($t > 0$) suit une loi de poisson de paramètre t (et ne dépend donc que de l'intervalle de temps t) et, pour tout entier naturel non nul n, on note X_n l'instant d'arrivée du n-ième client qui entre dans ce magasin à partir de l'instant t=0.

① Exprimer l'événement $(X_n \leq t)$ à l'aide de N_t puis déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

② Déterminer la fonction de répartition de X_n en fonction de n et t en laissant le résultat sous forme d'une somme et en déduire une densité de X_n

③ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}t^n dt$ converge et déterminer sa valeur. La variable X_n possède-t-elle une espérance ?

Exercice 6 : ✶✶✶

On effectue une succession infinie de lancers d'une pièce de monnaie équilibrée. A chaque lancer, à partir du deuxième, si le côté obtenu est différent du côté obtenu au lancer précédent, on gagne 1 euro. Pour tout $n \geq 2$, on définit la variable aléatoire X_n égale au gain total à l'issue des n premiers lancers.

① Déterminer les lois de X_2 et de X_3 puis calculer leurs espérances.

② Soit $n \geq 2$. Justifier que X_n prends ses valeurs dans $[\![0, n-1]\!]$. Calculer $\mathbb{P}(X_n = 0)$ et $\mathbb{P}(X_n = n-1)$

③ Pour tout $n \geq 2$ et tout $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = k-1)$$

④ On souhaite maintenant déterminer $\mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{V}(X_n)$ sans avoir à expliciter la loi de X_n...
On note, pour tout $n \geq 2$, Q_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall s \in \mathbb{R},\ Q_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(X_n = k)s^k$$

a. Soit $n \geq 2$. Calculer $Q_n(1)$ et montrer que $Q'_n(1) = \mathbb{E}(X_n)$. Exprimer $\mathbb{V}(X_n)$ à l'aide de la fonction Q_n.

b. Montrer, pour tout $n \geq 2$ et tout $s \in \mathbb{R}$: $Q_{n+1}(s) = \dfrac{1+s}{2}Q_n(s)$

c. En déduire une expression de $Q_n(s)$ en fonction de n et de s

d. Conclure sur l'espérance et la variance de X_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 7 (oral Agro 2018) : ✶✶✶

Dans cet exercice, le temps est mesuré de manière discrète $t = 0, 1, 2 \cdots$ etc.
On considère une population donnée qui va occuper successivement des sites numérotés $0, 1, \cdots, n$.
Initialement le site 0 est occupé par la population, les autres sont vides et se rempliront au fur et à mesure selon l'hypothèse suivante :
A partir du moment où le site $i-1$ est occupé, le temps d'attente de remplissage du site voisin numéro i correspond à une variable aléatoire G_i suivant une loi géométrique de paramètre $1/2$.
On suppose les variables $G_1, G_1, \cdots, G_n$ indépendantes.
On note T_n la variable égale au temps nécessaire pour que le site n soit occupé.

① Justifier que $T_n = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$.

② Écrire une fonction Python qui prend en argument un nombre n et qui simule la variable aléatoire T_n.

③ Pour tout entier $j \in \mathbb{N}^*$, on note Z_j le nombre de sites occupés à l'instant $t = j$ (sans compter le site 0).
Déterminer la loi de Z_j, son espérance et sa variance.

④ Montrer que pour tout entier $k \geq n$, $\mathbb{P}(T_n = k) = \dbinom{k-1}{n-1}\dfrac{1}{2^k}$.

⑤ **a.** Pour tout $x \in]0, \ln(2)[$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{xG_1}\right)$.
b. En déduire $\mathbb{E}\left(e^{xT_n}\right)$.

⑥ Montrer que pour tout $x \in]0, \ln(2)[$, et pour tout réel y, $\mathbb{P}(T_n \geq y) \leq \dfrac{\mathbb{E}(e^{xT_n})}{e^{xy}}$.

⑦ Donner le DL à l'ordre 2 de $2e^{-x} - 1$ au voisinage de 0. En déduire le DL à l'ordre 2 de $\ln(2e^{-x} - 1)$.

⑧ Déterminer $\underset{n\to\infty}{lim}\, \mathbb{P}(T_n \geq y)$. Interpréter ce résultat.

Exercice 8 (oral Agro 2019) : ✶✶✶

On dispose de N boules numérotées de 1 à N, indiscernables au toucher, et de 2 urnes A et B.

On répartit initialement les boules entre les deux urnes, puis on effectue une série illimitée d'étapes selon le protocole suivant : à chaque étape, on tire au hasard un nombre entre 1 et N et on change d'urne la boule portant le numéro correspondant.

On note X_0 la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes initialement dans l'urne A et pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules présentes dans l'urne A après n étapes.

① Soit $k \in [\![1, N-1]\!]$. Déterminer $P(X_{n+1} = k)$ en fonction de $P(X_n = k-1)$ et $P(X_n = k+1)$.

② **a.** Écrire une fonction `etape` prenant en arguments `k` (nombre de boules dans A à un instant donné) et `N` et renvoyant la valeur nombre de boules dans A à l'instant suivant .
b. Écrire une fonction renvoyant sous forme d'une liste les valeurs successivement prises par $X_0, ..., X_n$.

A partir de maintenant et dans toute la suite, on suppose $N = 3$.

③ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$; on note aussi $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$,

a. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$.
b. Montrer que 1 est valeur propre de M et donner le sous espace propre associé .
c. On suppose que X_0 suit une loi binomiale de paramètres 3 et 1/2. Quelle loi suit alors X_n ?
d. Quel est l'ensemble des lois que pourrait suivre X_0 pour que X_n ait la même loi que X_0 ?

④ On suppose que l'urne A est initialement vide. On appelle D la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour que l'urne A soit à nouveau vide.

a. Écrire une fonction python simulant D.
b. i. Calculer $P(D = 2)$ et $P(D = 4)$.
ii. Pourquoi D ne peut-il prendre que des valeurs paires ?
iii. Montrer que $P(X_{2k+2} = 0) = \frac{1}{9}P(X_{2k} = 0) + \frac{2}{9}$.
(Question non posée et non indispensable pour la suite, mais que je pose pour les révisions : calculer $P(X_{2k} = 0)$ en fonction de k.)
iv. On note désormais $u_k = P(X_{2k} = 0)$ et $d_k = P(D = 2k)$.
Montrer que $(X_{2k} = 0) = \displaystyle\bigcup_{j=1}^{k} ((X_{2k} = 0) \cap (D = 2j))$.
v. En déduire que $d_k = u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$.

c. A l'aide des relations $u_{k+1} = \frac{1}{9}u_k + \frac{2}{9}$ et $d_k = u_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{k-1} d_j u_{k-j}$, écrire une fonction Python renvoyant la liste $[d_1, \ldots, d_n]$.