Banque <<Agro -Véto>>
A - 0514

MATHÉMATIQUES

ÉPREUVE B

Durée : 3 heures 30 minutes

Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page. Ce contrôle doit être fait en début d'épreuve. En cas de doute, il doit alerter au plus tôt le chef de centre qui contrôlera et éventuellement remplacera le sujet.

L'usage d'une calculatrice est interdit pour cette épreuve. Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

Les parties A, B et C sont indépendantes.

On appellera « graphe » tout dessin du type de l'un des deux exemples G_1 (ci-dessous) et G_2 (en page 2). Les *sommets* du graphe sont les cercles numérotés (de 1 à 3 dans le premier exemple, de 1 à 5 dans le second). Les *flèches* du graphe sont les flèches reliant deux sommets. On remarquera les points suivants :

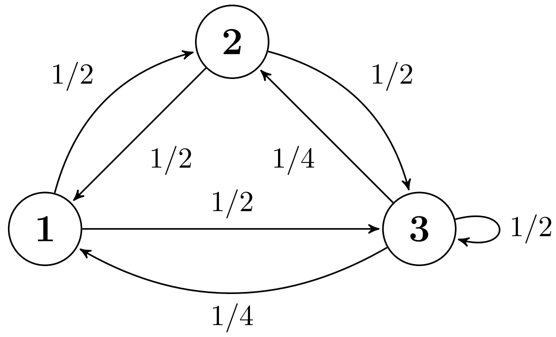
– entre deux sommets distincts i et j, on peut avoir une flèche de i vers j et une de j vers i ;

– certains couples de sommets ne sont pas reliés par une flèche (par exemple 1 et 4 dans le graphe G_2) ;

– une flèche peut relier un sommet à lui-même (c'est le cas du sommet 3 de G_1) ;

– pour tout couple (i, j) de sommets, la flèche allant de i à j est étiquetée par un réel $s_{i,j} \in [0, 1]$, représentant une probabilité de saut (par exemple $s_{3,1} = \frac{1}{4}$ et $s_{3,3} = \frac{1}{2}$ dans le graphe G_1) ;

– pour tout sommet i, la somme des probabilités étiquetant les flèches partant de i est égale à 1.



Graphe G_1

Une particule est placée à l'instant $n = 0$ sur le sommet i d'un graphe G. Elle saute aléatoirement à l'instant $n = 1$ sur un autre sommet de G en suivant une des flèches partant de i, la probabilité qu'elle suive la flèche de i vers j étant égale à $s_{i,j}$. On poursuit ainsi le processus, la particule sautant à chaque instant suivant, $n = 2$, 3, 4... du sommet du graphe où elle se trouve vers un nouveau sommet (éventuellement le même) en suivant aléatoirement l'une des flèches selon les probabilités indiquées.

On suppose que les sommets du graphe G sont numérotés de 1 à m. Le processus décrit ci-dessus définit une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\{1, \ldots, m\}$ telle que pour tout n, on a $X_n = k$ si la particule se trouve sur le sommet k du graphe G après le $n^{\text{ème}}$ saut . $\mathcal{A}$ est appelée *marche aléatoire* sur le graphe G.

A. Marches aléatoires sur des graphes finis

A.I. On étudie dans cette question quelques propriétés de la marche aléatoire sur le graphe G_1 ci-dessus.

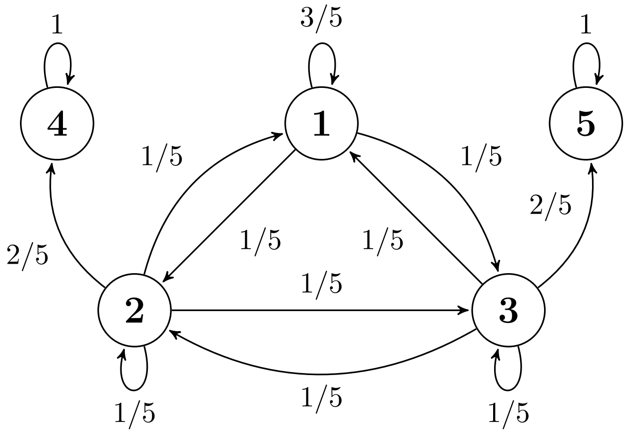
1. On considère la marche aléatoire sur G_1 partant de $X_0 = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note Y_n le vecteur colonne $Y_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \end{pmatrix}$. En appliquant la formule des probabilités totales au système complet d'événements associé à la variable aléatoire X_n, établir une relation matricielle entre Y_{n+1} et Y_n de la forme $Y_{n+1} = AY_n$ où A est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. En déduire que, pour tout n entier naturel, $Y_n = A^n Y_0$.
3. Donner, pour $n \geq 1$, $P(X_n = 3)$. Justifier votre réponse.
4. a) Calculez A^2, puis $A^2 \times (2A - I)$ (où I est la matrice identité d'ordre 3).
   En déduire la relation $A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A$.

   b) En déduire l'existence de deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telles que, pour tout entier naturel n non nul : $A^n = u_n A^2 + v_n A$.

   c) Exprimer, pour tout entier naturel n non nul, u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n, puis u_{n+2} en fonction de u_{n+1} et u_n.

   d) Calculer, pour tout entier naturel n non nul, u_n et v_n.
5. Déterminer, pour tout entier naturel n non nul la loi de X_n.

A.II. On considère maintenant une marche aléatoire $\mathcal{A}_2 = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur le graphe G_2 ci-dessous. On constate que lorsque la particule atteint le sommet 4 ou le sommet 5, elle y reste ensuite indéfiniment avec une probabilité 1 : ces deux sommets sont dits *absorbants*. On dit que la marche aléatoire est *absorbée* en 4 ou en 5 lorsqu'elle atteint le sommet correspondant. On s'intéresse ici à la probabilité pour $\mathcal{A}_2$ d'être absorbée en 4 ou en 5 en fonction de son point de départ. Pour tout couple d'entiers (i, j) avec $1 \leqslant i \leqslant 5$ et $4 \leqslant j \leqslant 5$, on note $a_{i,j}$ la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée en j sachant que $X_0 = i$.



Graphe G_2

1) Donner les valeurs des $a_{i,j}$ dans le cas particulier $(i, j) \in \{4, 5\}^2$.

2) En distinguant les cas selon le résultat du prochain saut de la particule, montrer que $(x, y, z) = (a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$ est un triplet solution du système

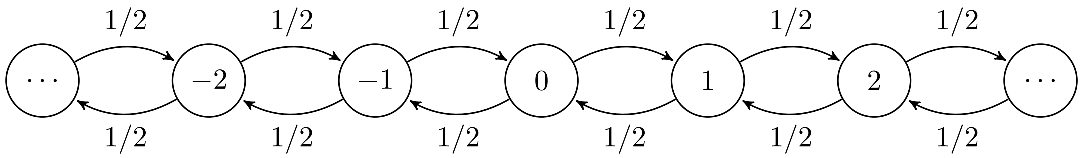
$$\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = x \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} = y \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = z. \end{cases}$$

Résoudre le système. Pour faciliter les calculs, on vérifiera que $y + z = 1$, puis on déterminera x. On achèvera la résolution du système. Donner, par un argument sur la géométrie du graphe ne nécessitant aucun calcul supplémentaire, les valeurs de $(a_{1,5}, a_{2,5}, a_{3,5})$.

3) Montrer que la probabilité que $\mathcal{A}_2$ soit absorbée (en 4 ou en 5 indifféremment) est égale à 1, quel que soit son point de départ.

4) On suppose que la loi de X_0 est uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et on constate que $\mathcal{A}_2$ est absorbée en 4. Quelle est la probabilité qu'elle soit partie du sommet 3 ?

B. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$



On considère ici une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$: la particule part du sommet 0 à l'instant $n = 0$. À l'instant 1, elle peut sauter en 1 ou en -1 avec la même probabilité $\dfrac{1}{2}$. À chaque instant suivant, si elle se trouve sur le sommet $i \in \mathbb{Z}$, elle saute de même soit sur $i+1$ soit sur $i-1$ avec la même probabilité $\dfrac{1}{2}$ (on dira respectivement qu'elle saute vers la droite ou vers la gauche). En conservant les notations de l'introduction, on obtient ainsi une suite $\mathcal{A} = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

B.I. On note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n = X_n - X_{n-1}$ la variable égale au n-ième saut. Les variables $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont supposées mutuellement indépendantes.

1) Justifier que pour tout $n \geqslant 1$, $X_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k$.

2) Calculer l'espérance et la variance de X_n.

B.II. On s'intéresse maintenant à la probabilité que la marche aléatoire passe par 0.

1) Comparer, pour $n \in \mathbb{N}$, la parité de n et celle de X_n. Que vaut $P(X_{2k+1} = 0)$ pour $k \in \mathbb{N}$?

2) Pour $k \in \mathbb{N}$, montrer que $q_k = P(X_{2k} = 0) = \dfrac{1}{4^k}\dbinom{2k}{k}$.

3) Pour deux entiers $k \in \mathbb{N}$ et $l \in [-k, k]$, déterminer plus généralement $P(X_{2k} = 2l)$.

B.III. On note T la variable aléatoire définie par :

$T = \min\{p \in \mathbb{N}^*, X_p = 0\}$ si l'ensemble $\{p \in \mathbb{N}^*, X_p = 0\}$ n'est pas vide ;
$T = 0$ sinon.

T s'interprète comme le *temps de premier retour en* 0 de la marche aléatoire $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Le but de cette question est d'établir la loi de T .
Pour un entier naturel $k \geqslant 1$, on considère les probabilités

$*$ $q_k = P(X_{2k} = 0)$ (cette valeur a été calculée à la question **B.II.2**) ;
$*$ $r_k = P(T = 2k)$

et on convient $q_0 = 1$.
On admet dans cette question l'égalité suivante, valable pour tout entier naturel n

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n \qquad (\diamondsuit)$$

dont la démonstration fait l'objet de la partie C.

1) Montrer que $r_1 = \frac{1}{2}$.

2) À l'aide d'une décomposition de l'événement $(X_{2n} = 0)$, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$q_n = \sum_{k=1}^{n} q_{n-k} r_k$$

3) En déduire la valeur de r_2.

4) Soit $n \geqslant 3$ un entier fixé. On suppose que pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $r_k = q_{k-1} - q_k$.
Établir que

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-k-1} q_k.$$

5) À l'aide de $(\diamondsuit)$, montrer que $r_n = q_{n-1} - q_n$. Conclure.

C. Preuve de l'égalité ($\diamondsuit$).

Le but de cette partie est d'établir, pour tout entier naturel n, l'égalité

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n \qquad (\diamondsuit)$$

admise dans la partie B. À cette fin, on notera G une variable aléatoire de loi normale d'espérance nulle et de variance 1, et $Y = G^2$. On admet que Y est une variable à densité.

C.I. On établit ici une densité de la loi de Y.

1) Exprimer $F(y) = P(Y \leqslant y)$ pour tout $y > 0$ à l'aide d'une intégrale.

2) En déduire qu'une densité de Y est donnée par la fonction f définie pour tout $y \in \mathbb{R}$ par

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}}}{\sqrt{2\pi y}} \text{ si } y > 0 \\ \\ 0 \text{ si } y \leqslant 0 \end{cases}.$$

Dans la suite, on dira qu'une variable aléatoire réelle ayant pour densité f suit la loi χ_1^2 (loi du khi-deux à un degré de liberté).

C.II. Le but de cette question est de déterminer une densité de la somme de deux variables de loi χ_1^2 indépendantes. On rappelle que si U et V sont deux variables aléatoires réelles à densité, indépendantes et de densités respectives u et v définies sur $\mathbb{R}$, alors une densité de $U + V$ est donnée par $w : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)v(x-t)\mathrm{d}t$. Pour $z > 0$ et (a, b) tels que $0 < a < z - b < z$, on pose

$$I_{a,b}(z) = \int_{a}^{z-b} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(z-y)}} \quad \text{et} \quad I(z) = \int_{0}^{z} \frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{y(z-y)}}.$$

1) Montrer que l'intégrale $I_{a,b}(z)$ est bien définie, et calculer sa valeur en fonction de la fonction Arcsin : on utilisera le changement de variable $y = \dfrac{z}{2}(x+1)$.

2) En déduire que $I(z)$ est convergente et vaut π pour tout $z > 0$.

3) Soient Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi χ_1^2. À l'aide de ce qui précède, montrer que $Z = Y_1 + Y_2$ suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, notée par la suite $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$.

C.III. Dans cette question, on calcule deux espérances afin d'en déduire ($\diamondsuit$). Soient Y une variable aléatoire de loi χ_1^2 et Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$. On admettra dans la suite que pour tout $n \in \mathbb{N}$, Y^n et Z^n possèdent une espérance.

1) À l'aide d'une intégration par parties soigneusement justifiée, établir pour tout entier naturel $n \geqslant 2$ une relation de récurrence entre $E(Z^n)$ et $E(Z^{n-1})$. En déduire, pour tout entier naturel $n \geq 1$, la valeur de $E(Z^n)$. Le résultat sera donné à l'aide d'une factorielle.

On admet qu'on obtient, par un raisonnement analogue, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$E(Y^n) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)}.$$

2) Déterminer une seconde expression de l'espérance de Z^n à partir de l'égalité $Z = Y_1 + Y_2$, où Y_1 et Y_2 sont indépendantes et suivent la loi χ_1^2 (question **C.II.3**).

3) En déduire ($\diamondsuit$).

L'égalité ($\diamondsuit$) est bien connue et il en existe de nombreuses preuves. Celle qui est proposée dans ce sujet est cependant récente, puisqu'elle a été publiée dans un article de G. Chang et C. Xu datant de 2011.

FIN DE L' ÉPREUVE