MATHEMATIQUES
Couples de var discrètes et produit scalaire

L'usage de la calculatrice ***n'est pas autorisé*** *au cours de l'épreuve. Si vous repérez ce qui semble être une erreur d'énoncé, signalez-le sur la copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous avez été amené à prendre.*

PROBLEME 1 :

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul et on se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, autrement dit :

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad A^\top = A \text{ et } \operatorname{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+\right\}$$

L'objectif de ce problème est de démontrer l'appartenance à $S_n^+(\mathbb{R})$ de certaines matrices. La partie A est consacrée à l'étude d'exemples en petites dimensions. Dans la partie B, on fait le lien avec la notion de produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, et dans la partie C, on fait le lien avec la notion de covariance. Ces deux dernières parties ne sont pas indépendantes.

Partie A : Quelques exemples

1. ♡ Préciser, en justifiant, parmi les matrices ci-dessous lesquelles appartiennent à $S_2^+(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

2. On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M(a,b)$ qui s'écrivent comme ci-dessous :

$$\mathcal{M} = \left\{M(a,b), \quad (a,b) \in \mathbb{R}^2\right\} \qquad \text{où } M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

a) ♡ Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel engendré par une famille judicieusement choisie. Justifier que cette famille est libre et en déduire la dimension de $\mathcal{M}$.

b) ♡ Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(\ 1, y, 1\ )$ (avec $y \in \mathbb{R}$) est un vecteur propre de $M(a,b)$ si, et seulement si, $2b + ay = y(a + by)$. En déduire deux vecteurs propres de $M(a,b)$ sous la forme $(1, y, 1)$ et préciser la valeur propre associée.

c) ♡ Déterminer un troisième vecteur propre orthogonal aux deux précédents.

d) En déduire un réel $r \geqslant 0$ et une matrice P inversible telle que $P^\top = P^{-1}$ et :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a,b) = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a+br & 0 \\ 0 & 0 & a-br \end{pmatrix} P^\top.$$

e) Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple portant sur a et b pour que $M(a,b)$ appartienne à $S_3^+(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrice de Gram

Soit une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on note $E = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_n)$ et on appelle matrice de Gram de cette famille la matrice G définie par :

$$G = \begin{pmatrix} (e_1 \mid e_1) & (e_1 \mid e_2) & \ldots & (e_1 \mid e_n) \\ (e_2 \mid e_1) & (e_2 \mid e_2) & \ldots & (e_2 \mid e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (e_n \mid e_1) & (e_n \mid e_2) & \ldots & (e_n \mid e_n) \end{pmatrix}$$

3. a) ♡ Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in E^{\perp} \Leftrightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!], \quad (x \mid e_i) = 0)\,.$$

   b) En déduire que pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Ker}(G) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E^{\perp}$$

   c) En déduire enfin que la famille $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre si et seulement si G est une matrice inversible.

4. Dans le sujet d'origine, il s'agissait de prouver que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$.
✐ Je propose en annexe une correction dont vous pourrez vous inspirer pour traiter la question 6.a) de la partie C/

Partie C : Matrice de covariance

Soient $(X_1, \ldots, X_n)\, n$ variables aléatoires réelles définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, P)$ telles que pour tout $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, la covariance de X_i et X_j, notée $\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$, existe. On rappelle que cette covariance vérifie :

$$\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) = \mathrm{E}\,(X_i X_j) - \mathrm{E}\,(X_i)\,\mathrm{E}\,(X_j)$$

On appelle matrice de covariance de $(X_1, \ldots, X_n)$ la matrice Σ définie par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \mathrm{Cov}\,(X_1, X_1) & \mathrm{Cov}\,(X_1, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}\,(X_1, X_n) \\ \mathrm{Cov}\,(X_2, X_1) & \mathrm{Cov}\,(X_2, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}\,(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{Cov}\,(X_n, X_1) & \mathrm{Cov}\,(X_n, X_2) & \ldots & \mathrm{Cov}\,(X_n, X_n) \end{pmatrix}$$

5. a) ♡ Démontrer que :

$$\forall (i, j, k) \in [\![1, n]\!]^3, \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j + xX_k) = \mathrm{Cov}\,(X_i, X_j) + x\,\mathrm{Cov}\,(X_i, X_k)$$

   b) ♡ En déduire, en raisonnant par récurrence, que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \mathrm{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^{n} x_j X_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,\mathrm{Cov}\,(X_i, X_j)$$

6. a) ♡ Justifier que Σ est une matrice symétrique réelle.

   b) En s'inspirant de la question 4 de la partie précédente, démontrer que $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.

PROBLEME 2 :

Pour tout entier naturel n, I_n désigne l'ensemble des entiers naturels k tels que $0 \leq k \leq n$. On notera par la suite : $I_n = [\![0, n]\!]$ et $I_n^* = [\![1, n]\!]$.

Pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose, pour tout réel t pour lequel cela a un sens,

$$g_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k)t^k$$

où $\mathbb{E}$ désigne l'espérance. La fonction g_X est appelée *fonction génératrice* de la variable aléatoire X. Dans tout ce problème, on considérera que $0^0 = 1$, ce qui permet par exemple d'affirmer ici que $g_X(0) = \mathbb{P}(X = 0)$.

A. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans I_n

Soit n un entier naturel et X une variable aléatoire réelle à valeurs dans I_n. Pour tout $k \in I_n$, on note $a_k = \mathbb{P}(X = k)$ la probabilité que X prenne la valeur k.

① ♡ Montrer que g_X est une fonction polynôme à coefficients réels dont on précisera le degré. Quelle est la valeur de $g_X(1)$? Quelle est la valeur de $g'_X(1)$?

② Soient (m_1, m_2) deux entiers naturels et (Z_1, Z_2) un couple de variables aléatoires à valeurs respectivement dans I_{m_1} et I_{m_2}. On suppose que Z_1 et Z_2 sont indépendantes.

a) En utilisant pour tout réel t l'expression $g_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$, montrer que
$$g_{Z_1+Z_2}(t) = g_{Z_1}(t)g_{Z_2}(t) \ (*)$$

b) ♡ On suppose que X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres n et p avec $p > 0$. Montrer que sa fonction génératrice g_X est définie par : $g_X(t) = (pt + q)^n$ $\forall t \in \mathbb{R}$ où on a posé $q = 1 - p$. ✐ *Note : Cette fonction génératrice caractérise les lois binomiales de paramètres n et p.*
♡ Retrouver grâce à cette fonction l'expression de $\mathbb{E}(X)$.

c) Soit Y une variable aléatoire réelle suivant la loi binomiale de paramètres n' et p avec n' un entier naturel. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer en utilisant A.2.a) et A.1.b) que $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $n + n'$, p.

B. Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$

Soit maintenant X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n = \mathbb{P}(X = n)$$

① Montrer que pour tout $t \in [-1, 1]$, la série $\sum a_n t^n$ est absolument convergente. En déduire que g_X est définie sur $[-1, 1]$ et donner la valeur de $g_X(1)$.

② Soit Y une variable aléatoire réelle à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors pour tout $t \in [-1, 1]$, $g_{X+Y}(t) = g_X(t)g_Y(t)$.

③ a) ♡ On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Calculer $g_X(t)$ pour $t \in [-1,1]$ (on pourra poser $q = 1-p$).

b) ♡ Même question pour X suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

c) ♡ Vérifier dans chacun des deux cas qui précède que g_X est dérivable sur $[-1,1]$ et que $g'_X(1) = \mathbb{E}(X)$.

C. Généralisation

— Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendantes et de même loi, dont la fonction génératrice commune est notée f.

— Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, indépendante des variables $(X_n)_{n\geq 1}$ et dont la fonction génératrice est notée h

On pose $S_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

On définit alors $Y = S_N$ (il s'agit donc de la somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires). On admettra que Y est bien un variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et on notera g sa fonction génératrice. Enfin on notera ψ_n la fonction génératrice de S_n pour tout $n \geq 0$. On cherche maintenant à déterminer g en fonction de f et h.

On se limitera ici au cas où N prend ses valeurs dans I_s, s étant un entier naturel supérieur à 1, fixé dans toute cette partie. Soit $t \in [-1,1]$.

① Montrer que, pour tout $n \in I_s$, on a $\psi_n(t) = (f(t))^n$.

② Montrer que, pour tout entier naturel k :

$$\mathbb{P}(Y=k) = \sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}((Y=k)\cap(N=n)) = \sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}((S_n=k)\cap(N=n))$$

③ En déduire l'égalité :

$$g(t)) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{s} \mathbb{P}(S_n=k)\mathbb{P}(N=n)\right)t^k$$

④ En déduire que $g(t) = (h\circ f)(t)$.

On admet pour la suite du problème que le résultat obtenu dans la question C.4. est encore valable dans le cas général, c'est-à-dire dans le cas où la variable aléatoire N est à valeurs dans $\mathbb{N}$.

⑤ On suppose ici que les $(X_n)_{n\geq 1}$ suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et N la loi géométrique de paramètre $p' \in]0,1[$ à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. <Montrer comment il est possible de la modéliser avec Python.

D. Multiplication d'une bactérie

Une bactérie B est présente dans un milieu M plus ou moins propice à sa reproduction. Elle se reproduit de la façon suivante : chaque individu donne naissance à X nouvelles bactéries B (appelées dans la suite « fils ») puis meurt. On peut donc classer les bactéries par génération : les bactéries d'une génération vont chacune donner naissance à un certain nombre de fils puis disparaître. Les fils de toutes les bactéries de la génération n formeront ainsi la génération $n+1$.
Le but est de déterminer la probabilité que toutes les bactéries B disparaissent du milieu M au bout d'un certain nombre de générations.

Pour $n \in N$, on notera dans la suite Y_n le nombre d'individus formant la génération n de bactéries B présentes dans M (on a donc d'après les hypothèses $Y_0 = 1$ car la génération $n = 0$ ne compte qu'une seule bactérie B). On notera de plus $x_n = \mathbb{P}(Y_n = 0)$ (on a donc $x_0 = 0$).

On admet que :
- les variables aléatoires comptant le nombre de « fils » de chaque bactérie B présente à une génération n donnée sont des variables de même loi. Ces variables sont aussi indépendantes de Y_n.
- X (nombre de « fils » d'une bactérie B fixée, quelle que soit sa génération) suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, et on notera f la fonction génératrice de X (on admet que pour tout $t \in [-1, 1]$, $f(t) = e^{\lambda(t-1)}$) ;

1. Étudier les variations de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire sa convergence.
   On admettra dans la suite que la probabilité p que la bactérie B disparaisse du milieu M est $p = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2. ♡ Donner la loi de Y_1 et en déduire que $x_1 = f(x_0)$.

3. Justifier que $Y_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{Y_1} X_k$ où les variables aléatoires $(X_k)_{1\leq k\leq Y_1}$ sont indépendantes et de même loi que X. Déduire du résultat admis en C. la fonction génératrice de Y_2 qu'on exprimera en fonction de f.

4. a) Pour tout $n \geq 1$, montrer que la fonction génératrice de Y_n vérifie : $g_{Y_n} = f^n$ (composée n-ième de f) et en déduire que $x_n = f(x_{n-1})$.
   b) ♡ En déduire que $p = f(p)$.

   Soit φ la fonction définie sur $[0, 1]$ par $\varphi(t) = f(t) - t$.

5. On suppose $\lambda \leq 1$. Etudier les variations de φ sur $[0, 1]$ et en déduire que la bactérie B disparaît du milieu M de façon presque certaine.

6. On suppose maintenant que $\lambda > 1$.
   a) ♡ Étudier les variations de la fonction $\theta : u \longmapsto 1 - \dfrac{lnu}{u}$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire successivement que : $\forall u > 1$, $lnu < u$ et $ue^{-u} - 1 < 0$.

b) ♡ En déduire qu'il existe $\beta \in]0,1[$ tel que $\varphi'(\beta) = 0$. Déterminer les variations de φ sur $[0,1]$.

c) ♡ Montrer qu'il existe un unique $\alpha \in]0,1[$ tel que $f(\alpha) = \alpha$.

d) ♡ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq \alpha$ et conclure quant à la probabilité de disparition de la bactérie B du milieu M.

7. a) ♡ Écrire une fonction Python `poisson(lbd)` de paramètre d'entrée le paramètre $\lambda > 0$ qui simule la réalisation d'une loi de poisson de paramètre λ.

   b) ♡ Écrire une fonction `tempsExtinction(lbd,nBMax)` qui retourne la première génération qui voit disparaître la bactérie si c'est le cas et la valeur nulle si Y dépasse une valeur entière `nBMax` de bactéries au-delà de laquelle on peut considérer que la population ne s'éteindra plus (par exemple `nBMax=100` semble raisonnable).

   Par exemple, on notant `LY` la liste des valeurs prises par Y et en prenant `nBMax=100` :
   — Pour $\lambda = 0.8$, si `LY=[1,0]` alors on retourne 1.
   — Pour $\lambda = 0.8$, si `LY=[[1, 2, 2, 4, 3, 1, 1, 0]]` alors on retourne 7.
   — Pour $\lambda = 1.4$, si `LY=[1, 1, 1, 2, 0]` alors on retourne 4.
   — Pour $\lambda = 1.4$, si `LY=[1, 1, 1, 2, 2, 5, 12, 14, 20, 21, 37, 47, 71, 99, 136]` alors on retourne 0.

   c) Écrire une fonction permettant de valider les réponses fournies en 5. et 6.d).

ANNEXE - Correction de la question C/4. du Problème 1

Dans cette question, on cherche à prouver que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$ et on pose $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. *Calculons le produit matriciel GX et démontrer que $X^\top GX = (x' \mid x')$ où x' est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ à préciser :*

   On a alors
   $$GX = \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n} (e_1|e_k)x_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n} (e_n|e_k)x_k \end{pmatrix},$$
   puis
   $${}^tXGX = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (e_i|e_k)x_i x_k = (x'|x')$$
   où $x' = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

2. Soit $\lambda \in \mathrm{sp}(G)$ et X un vecteur propre de G associé à cette valeur propre.
   En calculant de deux façons $X^\top GX$, démontrons que $\lambda \in \mathbb{R}_+$ et concluons :

   On a d'une part
   $${}^tXGX = {}^tX\lambda X = \lambda(X|X).$$
   D'autre part, on a ${}^tXGX = (x'|x')$ d'après la question précédente.
   En notant que $(X|X) > 0$ et $(x'|x') \geqslant 0$ car le produit scalaire est défini positif, on a donc $\lambda = \frac{(x'|x')}{(X|X)} \geqslant 0$.
   Comme G est symétrique par symétrie du produit scalaire, on a bien $G \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.