DS 06 - Exercice (oral Agro 2022) Février 2025

① a) $\alpha \in \mathbb{R}$. $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ continue sur $[b,+\infty[$ $(b \in \mathbb{R}_+^*)$

Soit $F(x) = \int_b^x \dfrac{dt}{t^\alpha}$.

- Si $\alpha = 1$, alors $F(x) = [\ln(t)]_b^x = \ln(x) - \ln(b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

Donc $\int_b^{\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

- Si $\alpha \neq 1$: $F(x) = \int_b^x \dfrac{dt}{t^\alpha} = \left[\dfrac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_b^x = \dfrac{x^{1-\alpha} - b^{1-\alpha}}{1-\alpha}$

si $\alpha < 1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1-\alpha} = +\infty$: $\int_b^{\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha}$ diverge.

si $\alpha > 1$, alors $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1-\alpha} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^{\alpha-1}} = 0$

D'où $\int_b^{\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha}$ converge et vaut $\dfrac{b^{1-\alpha}}{\alpha-1}$

Conclusion $\boxed{\int_b^{\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} \text{ CV ssi } \alpha > 1 \text{ et alors } \int_b^{\infty} \dfrac{dt}{t^\alpha} = \dfrac{1}{(\alpha-1)b^{\alpha-1}}}$

b) . f est positive sur $\mathbb{R}$

. f est continue sur $[b,+\infty[$ car $x \mapsto \dfrac{1}{x^{a+1}}$ continue sur $[b,+\infty[$ et continue sur $]-\infty,b[$ car nulle.

Donc f continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en b.

On peut noter que $\lim\limits_{\substack{x\to b\\x>b}} f(x) = f(b) = a\dfrac{b^a}{b^{a+1}} = \dfrac{a}{b} \neq 0$

Donc f continue sur $\mathbb{R} - \{b\}$.

. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_b^{\infty} a\dfrac{b^a}{x^{a+1}}\,dx = ab^a \int_b^{\infty} \dfrac{dx}{x^{a+1}}$ (Rel° de Chasles)

D'après ① a) cette dernière intégrale converge si $a+1 > 1 \Leftrightarrow a > 0$

et $\int_b^{\infty} \dfrac{dx}{x^{a+1}} = \dfrac{1}{(a+1-1)b^{a+1-1}} = \dfrac{1}{ab^a}$

D'où $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ converge et vaut $ab^a \cdot \dfrac{1}{ab^a} = 1$.

Conclusion $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité}}$

② X VAR qui suit la loi de Pareto de paramètres a et b

. $X(\Omega) = [b, +\infty[$ Donc $F(x) = P(X \leq x) = 0 \quad \forall x < b$

. $\forall x \geq b$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = a b^a \int_b^x \frac{dt}{t^{a+1}} = a b^a \left[\frac{t^{-a}}{-a}\right]_b^x$

$$= b^a \left[-\frac{1}{t^a}\right]_b^x = b^a\left(\frac{1}{b^a} - \frac{1}{x^a}\right) = 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a$$

Conclusion $\boxed{F(x) = \left[1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a\right] \mathbb{1}_{[b,+\infty[}(x)}$

③ a) $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1[}$; Posons $Y = bU^{-1/a} = \frac{b}{U^{1/a}}$

- $1/a > 0$ donc $U^{1/a}(\Omega) =]0,1[$ et donc $Y(\Omega) =]b, +\infty[$.
- $\forall x \leq b$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\emptyset) = 0$
- $\forall x > b$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P\left(\frac{b}{U^{1/a}} \leq x\right) = P\left(U^{1/a} \geq \frac{b}{x}\right)$

$$= 1 - P\left(U \leq \left(\frac{b}{x}\right)^a\right) = 1 - F_U\Big(\underbrace{\left(\frac{b}{x}\right)^a}_{\in]0,1[\ \forall x > b}\Big)$$

$$= 1 - \left(\frac{b}{x}\right)^a = F(x)$$

Conclusion $\boxed{\text{$Y = bU^{-1/a}$ suit une loi de Pareto de paramètres a et b.}}$

b)

```
def pareto(a, b):
    return b * rd.random() ** (-1/a)
```

c) Par simulation d'un n-échantillon (n supposé grand) de la loi de Pareto, dont on calcule la moyenne, estimateur sans biais de $E(X)$.

```
def estimEspX(a, b, n=10000):
    return sum([pareto(a,b) for k in range(n)])/n
```

estimEspX(1, 1) retourne 8.68, 9.84, 11,02
estimEspX(2,1) retourne 1.98, 2.009, ...

④ a) Pour l'existence de $E(X)$ on étudie $\int_{-\infty}^{\infty} |t f(t)| dt = I$.

$I = a b^a \int_b^{\infty} \frac{dt}{t^a}$; cette intégrale converge, d'après ① a) si $a > 1$

Sous cette condition, $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } \frac{ab^a}{(a-1)b^{a-1}} = \frac{ab}{a-1}}$

b) Soit $J = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t) dt = ab^a \int_b^{\infty} \frac{dt}{t^{a-1}}$; J cv ssi $a-1>1$ ~~et~~ $a>2$.

Sous cette condition,

$E(X^2)$ existe et vaut : $ab^a \frac{1}{(a-2)b^{a-2}} = \frac{ab^2}{a-2}$

D'après la formule de Koënig-Huygens, on a :

Si $a>2$, $V(X)$ existe et vaut $E(X^2) - E^2(X) = \frac{ab^2}{a-2} - \frac{a^2b^2}{(a-1)^2}$

Soit

$$V(X) = \frac{ab^2(a-1)^2 - a^2b^2(a-2)}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{\cancel{a^3b^2} - \cancel{2a^2b^2} + ab^2 - (\cancel{a^3b^2} - \cancel{2a^2b^2})}{(a-1)^2(a-2)}$$

Conclusion $\boxed{\text{Si } a>2, \ V(X) = \frac{ab^2}{(a-1)^2(a-2)}}$

[Ne pas oublier de vérifier que $V(X) \geq 0$ ...]

⑤ On suppose $b=1$; $(X_n)_{n\geq 1}$ suite de VAR indépendantes de même loi que X.

a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $W_n = \ln(X_n)$

$X_n(\Omega) = [1, +\infty[\Rightarrow W_n(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

D'où :

$\forall x<0$, $F_{W_n}(x) = P(W_n \leq x) = P(\emptyset) = 0$

$\forall x \geq 0$, $F_{W_n}(x) = P(\ln(X_n) \leq x) = P(X_n \leq e^x)$

$= F_{X_n}(e^x) = 1 - \left(\frac{1}{e^x}\right)^a = 1 - e^{-ax}$

Conclusion $\boxed{W_n \hookrightarrow \mathcal{E}(a) \ ; \ E(W_n) = \frac{1}{a} \ ; \ V(W_n) = \frac{1}{a^2}}$