Déplacements sur un graphe :

1 Problème : Agro - véto. Epreuve B 2014

Lu dans le rapport de jury : *« Le sujet porte sur le déplacement aléatoire d'une particule sur différents graphes. Dans la partie A. les graphes sont finis. Dans la partie B, on considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Enfin, le but de la partie C est de montrer une égalité combinatoire, utilisée dans la partie B, grâce à des variables aléatoires à densité.*
Les trois parties indépendantes de ce sujet abordent une très large part du programme de première et seconde année. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté au public concerné. Les indications fournies permettent au candidat de ne jamais resté bloqué. »

Remarques générales :
Lu dans le rapport de jury : *« Les correcteurs sont satisfaits dans l'ensemble de la présentation des copies.*
Par contre, la rédaction laisse souvent à désirer. Beaucoup de récurrences ne sont pas rédigées, voir mal initialisées. Les adverbes évidemment, clairement, forcément sont utilisés à la place des justifications mathématiques, particulièrement en probabilités. Dans le même ordre d'idées, rappelons que « prenons un exemple » n'a pas force de démonstration.
En probabilité, la notion de probabilité conditionnelle n'est pas toujours bien compris.
Par exemple, écrire $\mathbb{P}(A_2$ absorbé en 4 ou 5$) = a_{2,4} + a_{3,4} + a_{3,5}$ à la question A.II/3. est faux, et surtout, n'a pas de sens.
Les fractions ne sont pas (assez) souvent maîtrisées, même chez les candidats au niveau convenable : pas de réduction systématique, on trouve même dans une copie : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$. »

A. Marches aléatoires sur des graphes finis

A.1

1. $\{(X_n = k)_{k=1,2,3}\}$ est un système complet d'événements. Par la formule des probabilités totales :

$$P(X_{n+1} = 1) = \sum_{k=1}^{3} P\left(X_n = k\right) P\left(X_{n+1} = 1 | X_n = k\right)$$

D'aprés le graphe :

$$P\left(X_{n+1} = 1 | X_n = 1\right) = 0, P\left(X_{n+1} = 1 | X_n = 2\right) = 1/2, P\left(X_{n+1} = 1 | X_n = 3\right) = 1/4$$

$P(X_{n+1} = 1) = \frac{1}{2} P\left(X_n = 2\right) + \frac{1}{4} P\left(X_n = 3\right)$
Par un raisonnement identique :
$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2} P\left(X_n = 1\right) + \frac{1}{4} P\left(X_n = 3\right)$
$P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2} P\left(X_n = 1\right) + \frac{1}{2} P\left(X_n = 2\right) + \frac{1}{2} P\left(X_n = 3\right)$

$$\boxed{Y_{n+1} = AY_n \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question en général bien traitée, mais le système complet d'événements n'est pas toujours donné clairement, voire faux (par exemple, on lit trop souvent que $(X_n)_{n\geq 0}$ est un système complet.* »

2. C'est une démonstration par récurrence (classique) :
— $Y_0 = A^0 Y_0$ car $A^0 = I_3$
— On suppose que $Y_n = A^n Y_0$ pour un n fixé ($n \geq 0$).
— Alors $Y_{n+1} = AY_n = A \cdot A^n Y_0 = A^{n+1} Y_0$
Conclusion : $\boxed{Y_n = A^n Y_0,\ \forall n \in \mathbb{N}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Récurrence trop souvent mal rédigée : en particulier beaucoup d'initialisations avec $n = 1$. Des candidats évoquent une « suite géométrique ».* »

3. On utilise le fait que $Y_{n+1} = AY_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ dont la troisième ligne fournit l'égalité :
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 1) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 2) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = 3)$$
Alors en notant que $\{(X_n = k), k = 1, 2, 3\}$ est un SCE, et donc que $\mathbb{P}(X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2) + \mathbb{P}(X_n = 3) = 1$, on obtient
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}$$
Donc
$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2}}$$
Lu dans le rapport de jury : « *Peu traitée. Des candidats affirment, sans justification, que les coefficients de la 3ème ligne de A^n sont tous égaux à $1/2$. D'autres pensent que ces coefficients valent $(1/2)^n$.* »

4. a) $A^2 = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $\quad A^2(2A - I) = A$ donc $\boxed{A^3 = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A}$

Lu dans le rapport de jury : « *Bien traitée en général. Quelques candidats calculent A^3 pour obtenir la relation de la fin.* »

b) Soit H_n : « il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = u_n A^2 + v_n A$ »

<u>Inititialisation :</u> $A = u_1 A^2 + v_1 A$ avec $u_1 = 0$ et $v_1 = 1$
<u>Hérédité</u> : soit $n \geq 1$ fixé tel que H_n est vraie.
$A^{n+1} = A(u_n A^2 + v_n A) = u_n A^3 + v_n A^2 = \left(\frac{1}{2}u_n + v_n\right) A^2 + \frac{1}{2}u_n A$
H_{n+1} est vrai, en posant $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n, \quad v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n$
<u>Conclusion</u> : Par principe de récurrence :

$$\boxed{\text{il existe deux suites } (u_n)_{n\geq 1} \text{ et } (v_n)_{n\geq 1} \text{ telles que, } \forall n \geq 1 : A^n = u_n A^2 + v_n A.}$$

c) $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \end{cases}$ d'où $u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Peu réussie. Des formulations erronnées de la propriété à montrer par récurrence. La plus fréquente consistant à faire une confusion entre terme et suite. Des récurrences initialisées avec $n = 3$. Une erreur vue dans plusieurs copies : $u_{n+1} = u_n A$ et $v_{n+1} = v_n A$* »

d) On reconnaît une suite récurrente linéaire d'ordre 2
Equation caractéristique : $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ de solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$
D'où il existe deux réels a et b tels que $\forall n \geq 1, \quad u_n = a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$u_1 = 0$ et $u_2 = \frac{1}{2}u_1 + v_1 = 1$

$$\left\{\begin{array}{l} a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 0 \\ a + b\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a - \frac{1}{2}b = 0 \\ a + \frac{1}{4}b = 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = \frac{2}{3} \\ b = \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\forall n \geq 1, \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\boxed{\forall n \geq 1, \quad u_n = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad v_n = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$$

Lu dans le rapport de jury : « *En géneral la méthode est connue. Trop de candidats se contentent de donner la forme générale de la solution et estiment préférable de passer à la suite plutôt que de calculer les coefficients. Ce n'est pas forcément une bonne tactique.* »

5. Déterminons la loi de X_n. On sait déjà que $X_n(\Omega) = [\![1, 3]\!]$.
D'après les questions 2. et 4.b) :

$$Y_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \\ \mathbb{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} = A^n Y_0 = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_n A^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v_n A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_n \begin{pmatrix} 3/8 \\ 1/8 \\ 1/2 \end{pmatrix} + v_n \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

La première ligne nous donne :

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3}{8}\left(\frac{2}{3} + \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)$$

Ce qui suffit pour conclure puisque nous savons que $\mathbb{P}(X_n = 3) = 1/2$ et donc

$$\mathbb{P}(X_n = 2) = 1 - \mathbb{P}(X_n = 1) - \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2} - \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \geq 0, \, \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}, \, \mathbb{P}(X_n = 2) = \frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ et } \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1}{2}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Peu traitée. Même parmi les bons candidats la loi de X_n n'est pas toujours simplifiée.* »

A. II.

1. Si la particule est en 4 à l'instant initial(respectivement en 5) elle est absorbée en 4 :

$$\boxed{a_{4,4} = 1, \quad a_{5,5} = 1, \quad a_{4,5} = 0, \quad a_{5,4} = 0}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Souvent juste. Certains candidats ne donnent que* 2 *des* 4 *valeurs* »

2. Notons $E_4 =$ « la particule est absorbée en 4 »
 — *Rédaction 1 :* On considère le système complet d'événements : $\{(X_1 = j), j \in [\![1,5]\!]\}$.
 On a : $a_{1,4} = \mathbb{P}_{(X_0=1)}(E_4)$ et d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
a_{1,4} &= \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}_{(X_0=1)}(E_4 \cap (X_1 = j)) \\
&= \mathbb{P}_{(X_0=1)}((X_1 = 1) \cap E_4) + \mathbb{P}_{(X_0=1)}((X_1 = 2) \cap E_4) + \mathbb{P}_{(X_0=1)}((X_1 = 3) \cap E_4) + \\
&\qquad \mathbb{P}_{(X_0=1)}((X_1 = 4) \cap E_4) + \mathbb{P}_{(X_0=1)}((X_1 = 5) \cap E_4) \\
&= \mathbb{P}_{(X_0=1)}(X_1 = 1)\mathbb{P}_{(X_0=1)\cap(X_1=1)}(E_4) + \mathbb{P}_{(X_0=1)}(X_1 = 2)\mathbb{P}_{(X_0=1)\cap(X_1=2)}(E_4) + \\
&\qquad \mathbb{P}_{(X_0=1)}(X_1 = 3)\mathbb{P}_{(X_0=1)\cap(X_1=3)}(E_4) + 0 + 0 \\
&\qquad \text{avec } \mathbb{P}_{(X_0=1)\cap(X_1=j)}(E_4) = \mathbb{P}_{(X_1=j)}(E_4) = a_{j,4} \\
&= \frac{3}{5}a_{1,4} + \frac{1}{5}a_{2,4} + \frac{1}{5}a_{3,4}
\end{aligned}$$

 — *Rédaction 2 :* Pour $i \in \{1,2,3\}$, on écrit ici $a_{i,4} = \mathbb{P}_{(X_0=i)}(E_4) = \dfrac{\mathbb{P}(E_4 \cap (X_0 = i))}{\mathbb{P}(X_0 = i)}$
 et pour le numérateur, avec le même SCE $\{(X_1 = j), j \in [\![1,5]\!]\}$ et la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(E_4 \cap X_0 = i) = \sum_{j=1}^{5} \mathbb{P}(E_4 \cap (X_1 = j) \cap (X_0 = i))$$

 et d'après la formule des probabilités conditionnelles :
 $\mathbb{P}(E_4 \cap (X_1 = j) \cap (X_0 = i)) = \mathbb{P}(X_0 = i)\mathbb{P}_{(X_0=i)}((X_1 = j))\,\mathbb{P}_{(X_1=j)\cap(X_0=i)}(E_4)$
 avec :

$$\mathbb{P}_{(X_1=j)\cap(X_0=i)}(E_4) = \mathbb{P}_{(X_1=j)}(E_4) = a_{j,4}$$

 Dès lors, $\forall i \in [\![1,3]\!]$:

$$a_{i,4} = \sum_{j=1}^{5} a_{j,4}\mathbb{P}_{(X_0=i)}((X_1 = j))$$

 D'où on déduit :
 $a_{1,4} = \displaystyle\sum_{j=1}^{5} a_{j,4}\mathbb{P}_{(X_0=1)}(X_1 = j)$
 $a_{1,4} = a_{1,4}\mathbb{P}_{(X_0=1)}(X_1 = 1) + a_{2,4}\mathbb{P}_{(X_0=1)}(X_1 = 2) + a_{3,4}\mathbb{P}_{(X_0=1)}(X_1 = 3) + 0 + 0$
 $\boxed{a_{1,4} = \frac{3}{5}a_{1,4} + \frac{1}{5}a_{2,4} + \frac{1}{5}a_{3,4}}$
 $a_{2,4} = a_{1,4}\mathbb{P}_{(X_0=2)}(X_1 = 1) + a_{2,4}\mathbb{P}_{(X_0=2)}(X_1 = 2) + a_{3,4}\mathbb{P}_{(X_0=2)}(X_1 = 3)$
 $+a_{4,4}\mathbb{P}_{(X_0=2)}((X_1 = 4))$
 $\boxed{a_{2,4} = \frac{1}{5}a_{1,4} + \frac{1}{5}a_{2,4} + \frac{1}{5}a_{3,4} + \frac{2}{5}}$
 $a_{3,4} = a_{1,4}\mathbb{P}_{(X_0=3)}(X_1 = 1) + a_{2,4}\mathbb{P}_{(X_0=3)}(X_1 = 2) + a_{3,4}\mathbb{P}_{(X_0=3)}(X_1 = 3)$
 $\boxed{a_{3,4} = \frac{1}{5}a_{1,4} + \frac{1}{5}a_{2,4} + \frac{1}{5}a_{3,4}}$

Quelle que soit la méthode choisie, on a bien :

$(a_{1,4}, a_{2,4}, a_{3,4})$ est solution de (S) : $\begin{cases} \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = x \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z + \frac{2}{5} = y \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z = z \end{cases}$

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{3}{5}y + \frac{3}{5}z + \frac{2}{5} & = x + y + z & L_1 + L_2 + L_3 \\ \frac{3}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z & = x & L_2 \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{5}z & = z & L_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z & = 1 \\ \frac{3}{5}x - x & = -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5}x + \frac{1}{5} & = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y + z & = 1 \\ x & = \frac{1}{2} \\ z & = \frac{3}{10} \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x = 1/2,\ y = 7/10 \text{ et } z = 3/10}$

Par symétrie du graphe :

$$\boxed{a_{1,5} = a_{1,4} = \frac{1}{2},\quad a_{3,5} = a_{2,4} = \frac{7}{10},\quad a_{2,5} = a_{3,4} = \frac{3}{10}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Quelques très rares candidats arrivent à prouver le système. Beaucoup ne donnent qu'une explication : ce qui a été pris en compte dans le barème.*
Le système est souvent bien résolu par la méthode de Gauss souvent sans utiliser l'indication de l'énoncé. D'autres candidats trouvent la solution en utilisant l'indication sans la justifier : la plupart du temps, ils ne raisonnent pas par équivalence et ne vérifient pas que les valeurs obtenues sont solution du système.
Trop de candidats ne sont pas attentifs à la numérotation des sommets et écrivent « par symétrie $a_{2,5} = a_{2,4}$, $a_{3,5} = a_{3,4}$ » »

3. $\mathbb{P}(E_4) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_{i,4}\mathbb{P}(X_0 = i) = a_{1,4}\mathbb{P}(X_0 = 1) + a_{2,4} + \mathbb{P}(X_0 = 2) + a_{3,4}\mathbb{P}(X_0 = 3) + a_{4,4}\mathbb{P}(X_0 = 4)$
   $\mathbb{P}(E_5) = \displaystyle\sum_{i=1}^{5} a_{i,5}\mathbb{P}(X_0 = i) = a_{1,5}\mathbb{P}(X_0 = 1) + a_{2,5} + \mathbb{P}(X_0 = 2) + a_{3,5}\mathbb{P}(X_0 = 3) + a_{5,5}\mathbb{P}(X_0 = 5)$
   $\mathbb{P}(E_4) + \mathbb{P}(E_5) = \mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = 2) + \mathbb{P}(X_0 = 3) + \mathbb{P}(X_0 = 4) + \mathbb{P}(X_0 = 5) = 1$
   $\mathbb{P}(E_4 \cup E_5) = 1$

   $$\boxed{\text{La probabilité que la particule soit absorbée et égale à 1}}$$

4. On suppose dans cette question que $\mathbb{P}(X_0 = k) = 1/3$, $\forall k \in [\![1, 3]\!]$ (loi uniforme).
   $\mathbb{P}_{E_4}(X_0 = 3)) = \dfrac{\mathbb{P}((X_0 = 3) \cap E_4)}{\mathbb{P}(E_4)} = \dfrac{\mathbb{P}_{(X_0=3)}(E_4)\mathbb{P}(X_0 = 3)}{\mathbb{P}(E_4)}$ d'après la formule de Bayes.
   et, d'après la question qui précède,
   $\mathbb{P}(E_4) = \dfrac{1}{2}\mathbb{P}(X_0 = 1) + \dfrac{7}{10}\mathbb{P}(X_0 = 2) + \dfrac{3}{10}\mathbb{P}(X_0 = 3) = \dfrac{1}{2}\dfrac{1}{3} + \dfrac{7}{10}\dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{10}\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{2}$
   $\mathbb{P}_{E_4}(X_0 = 3) = a_{2,3}\dfrac{1/3}{1/2} = a_{3,4}\dfrac{2}{3}$

   $$\boxed{\mathbb{P}_{E_4}(X_0 = 3) = \frac{1}{5}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Rarement traitée. On constate que la notion de probabilité conditionnelle n'est pas toujours comprise.* »

B. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

B.I/

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k = \sum_{k=1}^{n} (X_k - X_{k-1}) = X_n - X_0$ par télescopage et $X_0 = 0$ (variable certaine).

   Conclusion : $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} U_k = X_n}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Généralement bien traitée. On trouve quelques copies se contentant d'affirmer que le résultat est immédiat « par télescopage ». D'autres s'embarquent dans des descriptions intuitives des déplacements de la particule au lieu d'utiliser les formulations mathématiques de l'énoncé.* »

2. On commence par préciser que

$$U_k(\Omega) = \{-1, 1\} \text{ avec } \mathbb{P}(U_k = -1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(U_k = 1)$$

   donc $\mathbb{E}(U_k) = 0$ et $\mathbb{E}(U_k^2) = (-1)^2\frac{1}{2} + 1^2\frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \mathbb{V}(U_k) = \mathbb{E}(U_k^2) = 1$ d'après K.H.
   Dès lors,
   par linéarité de l'espérance : $\mathbb{E}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(U_k) = 0$

   et les variables U_k étant indépendantes : $\mathbb{V}(X_n) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} V(U_k)$

   Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(X_n) = 0, \quad \mathbb{V}(X_n) = n}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Les justifications, à savoir linéarité de l'espérance, indépendance pour la variance, ne sont pas toujours indiquées. Plusieurs candidats trouvent $\mathbb{V}(U_k) = 1/4$, d'autres font des confusions avec la loi binomiale.* »

B.II

1. Si n est pair (respectivement impair) , X_n ne prend que des valeurs paires (respectivement impaires)
   D'où $\boxed{\mathbb{P}(X_{2k+1} = 0) = 0}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Bien en général* ».

2. Notons D_{2k} le nombre de déplacements à droite. D_{2k} compte le nombre de succès (aller à droite) au cours de $2k$ épreuves de Bernoulli indépendantes de même probabilité de succés 1/2
   Donc $\boxed{D_{2k} \hookrightarrow \mathcal{B}(2k, 1/2)}$

   $q_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \mathbb{P}(D_{2k} = k) = \dbinom{2k}{k}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

$$\boxed{q_k = \mathbb{P}(X_{2k} = 0) = \binom{2k}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}}$$

   Lu dans le rapport de jury : « *L'indépendance des sauts est rarement citée.* »

3. $\mathbb{P}(X_{2k} = 2\ell) = \mathbb{P}\left(D_{2k} - (2k - D_{2k}) = 2l\right) = \mathbb{P}(D_{2k} = k + l) = \binom{2k}{k+l}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k}$
puisque le nombre de pas à gauche au $2k$-ième saut vaut $2k - D_{2k}$...
Lu dans le rapport de jury : « *Peu traitée* »

B.III

1. *Première rédaction :* On écrit que
$$r_1 = P(T = 2) = P(U_1 = 1, U_2 = -1) + P(U_1 = -1, U_2 = 1) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
(on utilise l'indépendance de U_1 et U_2).
Seconde rédaction : Puisque $(X_0 = 0)$ est un événement certain, on écrit que
$$r_1 = \mathbb{P}(X_2 = 0) = q_1 = \frac{1}{4}\binom{2}{1} = \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$
Lu dans le rapport de jury : « *En général bien traitée lorsqu'elle est abordée.* »

2. Remarquons que T ne peut pas prendre que des valeurs paires
Si $(X_{2n} = 0)$ est réalisé, **alors** le premier retour à 0 a eu lieu à l'instant 2 ou l'instant 4,..., ou l'instant $2n$ (✐ **Attention :** Noter que $\{(T = 2k), 1 \leq k \leq n\}$ n'est pas un SCE et il ne s'agit donc pas ici d'appliquer la Formule des probabilités totales...)
En conséquence :
$$(X_{2n} = 0) \subset \bigcup_{k=1}^{n} (T = 2k)$$
et donc
$$(X_{2n} = 0) = (X_{2n} = 0) \cap \bigcup_{k=1}^{n} (T = 2k)$$
D'où :
$$(X_{2n} = 0) = \bigcup_{k=1}^{n} \left[(X_{2n} = 0) \cap (T = 2k)\right]$$
Soit
$$\mathbb{P}\left((X_{2n} = 0)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left[(X_{2n} = 0) \cap (T = 2k)\right] \text{ par incompatibilité}$$
soit
$$\mathbb{P}\left((X_{2n} = 0)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left((X_{2n} = 0) \,|(T = 2k)\right) \mathbb{P}\left(T = 2k\right)$$
Or si $(T = 2k)$ est réalisé, c'est comme si on redémarrait depuis le début à partir de l'instant 2k (qui devient l'origine des temps) et donc $\mathbb{P}\left((X_{2n} = 0) \,|(T = 2k)\right) = \mathbb{P}\left(X_{2n-2k} = 0\right)$
$\mathbb{P}\left((X_{2n} = 0)\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_{2n-2k} = 0\right) \mathbb{P}\left(T = 2k\right)$
$$\boxed{q_n = \textstyle\sum_{k=1}^{n} q_{n-k} r_k}$$
Lu dans le rapport de jury : « *Souvent admise. Traitée correctement dans quelques copies. L'erreur la plus fréquente :* $(X_{2n} = 0) = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} (X_{2(n-k)} = 0) \cap (T_k = 0)$ »

3. $q_2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{2} r_k q_{2-k} = r_1 q_1 + r_2 q_0 = \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4$

   $r_2 = \dfrac{3}{8} - \dfrac{1}{2}\dbinom{2}{1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{8}$

   Remarque : c'est cohérent car $\mathbb{P}(T=4) = \mathbb{P}(U_1 = 1, U_2 = 1, U_3 = -1, U_4 = -1) + \mathbb{P}(U_1 = -1, U_2 = -1, U_3 = 1, U_4 = 1)$

   Lu dans le rapport de jury : « *Question généralement juste quand elle est abordée* ».

4. On suppose que : « $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \quad r_k = q_{k-1} - q_k$ » donc d'après la question B.III.2), on a :

$$q_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} r_k + q_0 r_n = \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k}\left(q_{k-1} - q_k\right) + r_n \text{ car } q_0 = 1$$

   D'où :

$$r_n = q_n + \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_{k-1}$$

   avec

$$q_n + \sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_k = \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k$$

   En faisant un changement d'indice :

$$\sum_{k=1}^{n-1} q_{n-k} q_{k-1} = \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-1-k} q_k$$

   Conclusion : $\boxed{r_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k} q_k - \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-k-1} q_k}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Trouvée juste dans quelques copies.* »

5. Soit $n \geq 3$. Supposons que $r_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} q_k q_{n-k} - \sum_{k=0}^{n-2} q_k q_{n-k-1}$

   On utilise alors la question B.II.) et l'égalité admise : ($\diamond$)

$$\sum_{k=0}^{n-1} q_k q_{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \binom{2n-2k}{n-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \left[4^n - \binom{2n}{n}\right]$$

$$\sum_{k=0}^{n-2} q_k q_{n-k-1} = \sum_{k=0}^{n-2} \left(\frac{1}{4}\right)^k \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k-1} \binom{2n-2k-2}{n-k-1}) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \left[4^{n-1} - \binom{2n-2}{n-1}\right] \text{ Soit}$$

$$r_n = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \binom{2n-2}{n-1} - \left(\frac{1}{4}\right)^n \binom{2n}{n} = q_{n-1} - q_n$$

   On pose H_n : « $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $r_k = q_{k-1} - q_k$ »
   et on va démontrer par récurrence que H_n est vraie pour tout $n \geq 1$:
   <u>Initialisation</u> :
   $r_1 = \dfrac{1}{2}$, $q_0 - q_1 = 1 - \dfrac{1}{2} = r_1$

   $r_2 = \dfrac{1}{8}$, $q_1 - q_2 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{8} = r_2$ donc H_2 est vrai

Hérédité : Soit $n \geq 3$, tel que H_{n-1} est vrai, autrement dit : $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $r_k = q_{k-1} - q_k$

D'après la question 4., on a donc : $r_n = \sum_{k=0}^{n-1} q_{n-k}q_k - \sum_{k=0}^{n-2} q_{n-k-1}q_k$

et, d'aprés le début de cette question, on en déduit que : $r_n = q_{n-1} - q_n$

comme par hypothèse de récurrence $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $r_k = q_{k-1} - q_k$

Donc H_n est vraie.

Conclusion : $\forall n \geq 2, \quad H_n$ est vrai

$$\boxed{\forall k \geq 1, \quad r_k = q_{k-1} - q_k}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Relation obtenue dans qqs copies. Récurrence jamais rédigée.* »

C. Preuve de l'égalité ($\diamond$)

C.I

1. $\forall y \geq 0$ (car $G^2(\Omega) = \mathbb{R}_+$), on a :

$$F(y) = \mathbb{P}(G^2 \leq y) = \mathbb{P}\left(|G| \leq \sqrt{y}\right) = P\left(-\sqrt{y} \leq G \leq \sqrt{y}\right)\right) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$$

où Φ est la fonction de répartition de G

ou encore, parce qu'on nous demande une expression sous forme intégrale :

$$\boxed{\forall y > 0,\ F(y) = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dt}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Trop fréquemment l'erreur classique :* $\mathbb{P}(G^2 \leq y) = \mathbb{P}(G \leq \sqrt{y})$

Une erreur plus « originale » : $\mathbb{P}(G^2 \leq y) = \int_{-\infty}^{y} g^2(t)dt$ »

2. On commence par noter que $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$

D'où, $\forall y < 0, \quad F(y) = 0$. F est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_-^*$ puisque constante égale à 0.

Et si $y \geq 0$, on vient de voir que $F(y) = 2\Phi(\sqrt{y}) - 1$ avec ϕ fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc, la fonction $y \longmapsto \sqrt{y}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ par composition de fonctions de classes $\mathcal{C}^1$ sur cet intervalle.

On vérifie ensuite que, $\lim\limits_{0+} F(y) = 2\Phi(0) - 1 = 2\frac{1}{2} - 1 = 0 = \lim\limits_{0-} F(y)$

Donc Y est une variable à densité qu'on obtient par dérivation sur $\mathbb{R}^*$ (on la prendra nulle en $y = 0$).

$$\boxed{f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{y}}\varphi(\sqrt{y}) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{y}} e^{-y/2} & \text{si } y > 0 \\ 0 \ \text{sinon} & \end{cases}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Le cas $y \leq 0$ est rarement justifié* »

C.II

1. La fonction $y \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{y(z-y)}}$ est continue sur $]0, z[$ car inverse d'une fonction continue sur cet intervalle sur lequel elle ne s'annule pas (en effet $y \longmapsto y(z-y)$ est continue et strictement positive sur

$]0,z[$).

En conséquence $y \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{y(z-y)}}$ est continue sur $[a, z-b]$ qui est inclus dans $]0, z[$ par hypothèse.

Conclusion : $\boxed{I_{a,b}(z) \text{ est bien définie pour } z > 0 \text{ et } 0 < a < z - b < z}$

Calculons sa valeur à l'aide du changement de variable suggéré :

$$y = \frac{z}{2}(x+1) \Leftrightarrow x + 1 = \frac{2}{z}y \Leftrightarrow x = \frac{2}{z}y - 1 = \psi(y)$$

avec $\psi \in \mathcal{C}^1([a, z-b])$ puisque $\psi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$.

Dès lors, en notant que $dy = \dfrac{z}{2}dx$, on obtient successivement :

$$\sqrt{y(z-y)} = \sqrt{\frac{z}{2}(x+1)(z - \frac{x+1}{2}z)} = \sqrt{\frac{z}{2}(x+1)\frac{z-xz}{2}} = \frac{z}{2}\sqrt{1-x^2}$$

ce qui a du sens puisque $\psi(]0,z[) \subset]-1,1[$ et donc $x = \psi(y) \in]-1,1[$...
et donc :

$$I_{a,b}(z) = \int_{2a/z-1}^{1-2b/z} \frac{2}{z\sqrt{1-x^2}}\frac{z}{2}dx = \int_{2a/z-1}^{1-2b/z} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

et comme on se souvient que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ (il faut savoir le redémontrer grâce à la dérivation des fonctions réciproques !), on a :

Conclusion : $\boxed{I_{a,b}(z) = \arcsin\left(1 - \frac{2b}{z}\right) - \arcsin\left(\frac{2a}{z} - 1\right)}$

Lu dans le rapport de jury : « *Pour l'existence, la continuité n'est pas assez souvent invoquée. Quelques confusions entre les variables x et z, mais lorsque la question est abordée, le calcul est généralement correct* »

2. On prouve la convergence de $I(z)$ par passage à la limite sur $I_{a,b}(z)$ en faisant tendre à la fois a et b vers 0.
   soit,

   $$\underset{a\to 0}{lim}\underset{b\to 0}{lim} I_{a,b}(z) = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

   Conclusion : $\boxed{I(z) \text{ converge et vaut : } = \pi}$

   Lu dans le rapport de jury : « *Des candidats pensent pouvoir se passer d'un passage à la limite et remplacent a et b par 0.* »

3. Soit $Z = Y_1 + Y_2$
   Z est la somme de deux variables indépendantes admettant une densité, donc Z admet une densité qu'on notera w.
   On commence par noter que $Z(\Omega) = \mathbb{R}^+$ donc $\forall z \leq 0, \quad w(z) = 0$

   Par ailleurs,

$\forall z > 0$,

$$\begin{aligned}
w(z) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)f(z-t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t/2}}{\sqrt{2\pi t}} \frac{e^{-(z-t)/2}}{\sqrt{2\pi(z-t)}} 1_{\mathbb{R}_+^*}(t) 1_{\mathbb{R}_+^*}(z-t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-z/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{t(z-t)}} 1_{\mathbb{R}_+^* \cap]-\infty, z[}(t)dt \text{ car } 1_{\mathbb{R}_+^*}(z-t) = 1 \text{ si } z-t>0 \Leftrightarrow t<z \\
&= \frac{1}{2\pi} e^{-z/2} \int_0^z \frac{1}{\sqrt{t(z-t)}} dt = \frac{1}{2\pi} e^{-z/2} I(z) = \frac{1}{2} e^{-z/2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \exp(1/2)}$

Lu dans le rapport de jury : « *Souvent bien traitée quand elle est abordée. On rencontre quand même des intégrales* $\int_0^\infty \frac{dt}{\sqrt{t(z-t)}}$. *Question bien traitée dans quelques copies, le cas $x < 0$ est souvent oublié.* »

C.III

On admet que Y^n et Z^n possèdent une espérance avec $Y \hookrightarrow \chi_1^2$ et $Z \hookrightarrow \exp(1/2)$.

1. D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(Z^n) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} x^n e^{-x/2} dx$$

On effectue alors une intégration par parties en posant : $u(x) = x^n$, $v(x) = -e^{-x/2}$
u, v sont de classe C^1 sur$[0,+\infty[$ et $\lim\limits_{+\infty} u(x)v(x) = 0$ par croissances comparées
On peut donc faire l'intégration par parties directement dans l'intégrale généralisée en assurant que les intégrales sont de même nature et que :

$$E(Z^n) = \left[-x^n e^{-x/2}\right]_0^\infty + \int_0^{+\infty} n x^{n-1} e^{-x/2} dx = 2n\mathbb{E}(Z^{n-1})$$

Il suffit d'une récurrence (que je vous laisse rédiger) pour obtenir :
Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(Z^n) = 2^n n!}$ puisque $\mathbb{E}(Z) = 2$

Lu dans le rapport de jury : « *Lorsque cette question est traitée, l'intégration par parties est généralement bien faite. Peu de candidats trouvent l'expression de* $\mathbb{E}(Z^n)$ »

2. On écrit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^n) = \mathbb{E}((Y_1+Y_2)^n) &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} Y_1^k Y_2^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \mathbb{E}(Y_1^k Y_2^{n-k}) \text{ par linéarité de l'espérance} \\
&= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E(Y_1^k) E(Y_2^{n-k}) \text{ car } Y_1^k \text{ et } Y_2^{n-k} \text{ sont indépendantes (lemme de coalition)}
\end{aligned}$$

D'où, grâce à la valeur de $\mathbb{E}(Y^n)$, donnée dans le sujet :

$$\boxed{\mathbb{E}(Z^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(2k)!}{k!2^k} \frac{(2n-2k)!}{(n-k)!2^{n-k}}}$$

3. $2^n n! = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!(2k)!}{(k!)^2} \frac{(2n-2k)!}{((n-k)!)^2} = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k}$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} = 4^n}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Quelques candidats mènent à terme le calcul* »

Lu dans le rapport de jury : « *Encore cette année, nous conseillons aux candidats de prendre le temps de lire attentivement l'énoncé et de mener à terme les calculs demandés : il est vraiment dommage de perdre des points en ne fournissant pas toutes les valeurs demandées ou en ne simplifiant pas les résultats trouvés. Une lecture attentive de l'énoncé permet d'en comprendre l'enchaînement et ainsi d'éviter les fausses pistes et les calculs inutiles.* »

FIN