12 T.D. Réduction d'endomorphismes.

Exercice 1 : ✶

① Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés pour les matrices A et B suivantes, considérées respectivement comme les matrices d'endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B_2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

② Dire, parmi ces matrices, celles qui sont inversibles.

③ Calculer les puissances $n$ièmes des matrices A_1, A_2, A_3, B_1 et B_3.

Exercice 2 : ✶ *D'après Oral Agro-véto 2008*

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

① Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$ et donner une relation entre a_{n+1}, b_{n+1}, a_n et b_n.

② Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

③ Montrer que A est diagonalisable et la diagonaliser. Retrouver le résultat précédent.

Exercice 3 : ✶ *D'après Oral Agro-Véto 2011*

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

① Montrer que A est semblable à la matrice $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

② Montrer que pour tout $n \geq 2$, D^n est combinaison linéaire de D et de D^2.

③ Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4 : ✶

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

① Calculer $A^3 - 3A^2 + 3A - I_3$.

② Utiliser la relation précédente pour montrer que A n'est pas diagonalisable.

③ A est-elle inversible ?

Exercice 5 : ✶✶ D'après Oral Agro-véto 2007

A tout polynôme P à coefficients réels, on associe le polynôme $Q = f(P)$ défini par :

$$Q(X) = (X-1)(X-2)P'(X) - 2XP(X)$$

① Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

② Montrer que si P est un vecteur propre de f alors $\deg(P) = 2$.

③ Déterminer les éléments propres (valeurs propres et vecteurs propres) de f.

Exercice 6 : ✶✶✶ D'après Oral Agro-véto 2006

On considère la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ représenté par J dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$.

① Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres correspondants.
Montrer que l'endomorphisme f est diagonalisable.

On considère une base $\mathcal{C} = (c_1, c_2, c_3)$ de $\mathbb{R}^3$ constituée de vecteurs propres de f.

② On considère un endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ et on suppose qu'il vérifie l'égalité :

$$g \circ g = f$$

Montrer qu'on a $g \circ f = f \circ g$, puis que g est diagonalisable dans la base $\mathcal{C}$.

③ Existe-t-il une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant : $M^2 = J$?
Expliquer comment trouver une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ vérifiant : $M^2 = J$.

Exercice 7 : ✶✶ D'après Oral Agro-véto 2016

On considère la matrice A suivante : $A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & c \\ a & b & 0 \end{pmatrix}$ où a,b,c sont réels.

① Dans cette question on prend $a = b = 0$ et $c = 1$. A est-elle diagonalisable ?

② Dans cette question on impose $0 < a < b < c$.

On considère $f : \mathbb{R} - \{-a, -b, -c\} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \dfrac{a}{a+t} + \dfrac{b}{b+t} + \dfrac{c}{c+t}$.

a. Étudier les variations de f.
b. Justifier que l'équation $f(t) = 1$ admet trois solutions distinctes.
c. Écrire une fonction Python `dicho1` d'arguments a, b, f, eps qui renvoie par dichotomie une valeur approchée à eps près de l'unique solution de $f(t) = 1$ sur $]-b, -a[$.
d. Expliquer l'algorithme suivant :

```
def dicho2(f,eps):
    h = 1
    while f(h) >1 :
       h = 2*h
    return dicho1(-h,0,f,eps)
```

③ Montrer que le vecteur $u_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{a+t} \\ \frac{1}{b+t} \\ \frac{1}{c+t} \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre t si et seulement si $f(t) = 1$.
A est-elle diagonalisable ?

④ Écrire un script qui à partir de `dicho1` et `dicho2` détermine les valeurs propres de A.
Vérifier votre résultat grâce à la bibliothèque `np.linalg`.

Exercice 8 : ✶✶ D'après Oral Agro-véto 2019

Soient $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ des nombres complexes (pas forcément distincts). on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & \dots & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-3} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \\ a_2 & & & & & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}$$

① Étude du cas $n = 2$. On a $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

a. Quelles sont les valeurs propres de A ?
b. A est-elle diagonalisable ?

② Écrire une fonction Python prenant en entrée une liste $L = [a_0, \dots, a_{n-1}]$ et renvoyant la matrice A.

③ On note P le polynôme $a_0 + a_1X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1}$, et ω un nombre complexe vérifiant $\omega^n = 1$.

Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega \\ \omega^2 \\ \vdots \\ \omega^{(n-1)} \end{pmatrix}$.

Montrer que X est vecteur propre de A et donner la valeur propre associée.

④ Etude du cas $n = 4$.

a. Déterminer tous les complexes z tels que $z^4 = 1$.
b. Déduire de la question précédente 4 vecteurs propres de A .
c. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$ et on note $\overline{P}$ la matrice conjuguée de P (c'est à dire la matrice carrée d'ordre 4 dont chaque terme de la ligne i colonne j est le conjugué du terme de la ligne i colonne j de P.

i. Calculer $P\overline{P}$.
ii. En déduire que les 4 vecteurs propres donnés précédement forment une famille libre.
iii. Montrer que A est diagonalisable et donner ses valeurs propres en fonction de P.

d. Donner les valeurs propres et la dimension des sous-espaces vectoriels propres de

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$