TD 11 - Exercice 9 :

Par hypothèse $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ et $Y = X^2$

① Déterminons une densité de Y :

(i) $X(\Omega) = \mathbb{R} \Rightarrow Y(\Omega) = X^2(\Omega) = \mathbb{R}^+$

conséquence : $\forall x < 0,\ F_Y(x) = 0$.

(ii) $\forall x \geq 0,\ F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X^2 \leq x) = P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x})$

$= \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$

$= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$ puisque $\forall t \in \mathbb{R}$: $\Phi(t) + \Phi(-t) = 1$.

(iii) on obtient une densité f_Y de Y en dérivant F_Y :

soit : $\forall x < 0,\ f_Y(x) = 0$

$\forall x > 0\ \ f_Y(x) = F_Y'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} 2\Phi'(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}}\varphi(\sqrt{x})$

conclusion $\boxed{f_Y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}$

② Déterminons $E(Y)$: il suffit d'écrire :

$E(Y) = E(X^2) = V(X) + E^2(X) = 1 + 0^2 = 1$

③ Déterminons $E(Y^2)$ pour appliquer Koenig-Huygens :

on étudie $I = \int_{-\infty}^{\infty} t^4 \varphi(t)\,dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^4 e^{-t^2/2}\,dt$ puisque $E(Y^2) = E(X^4)$

I CV ssi $J = \int_0^{\infty} t^4 e^{-t^2/2}\,dt$ CV puisque $t \mapsto t^4 e^{-t^2/2}$ est paire.

et on fait une IPP : $\begin{cases} u(t) = t^3 & u'(t) = 3t^2 \\ v'(t) = te^{-t^2/2} & v(t) = -e^{-t^2/2} \end{cases}$, $u, v \in C^1(\mathbb{R}_+)$

Donc J est de même nature que $K = \int_0^{\infty} -3t^2 e^{-t^2/2}\,dt$ qui converge car $\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} \int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{2} E(X^2)$

$= \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.

Dès lors, J converge et

$J = \lim_{\infty} u(t)v(t) - u(0)v(0) + 3 \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{2\pi}$

conclusion $E(Y^2)$ existe et $E(Y^2) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \cdot I = \boxed{3}$

on a alors $V(Y) = 3 - 1^2 = \boxed{2}$