Exercice 6. $U \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1[}$, $\lambda > 0$

① $U(\Omega) = [0,1[\Rightarrow (1-U)(\Omega) =]0,1] \Rightarrow (\ln(1-U))(\Omega) = \mathbb{R}_-$

D'où $V(\Omega) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-U)(\Omega) = \mathbb{R}_+$ car $-1/\lambda < 0$.

Dès lors,

$\forall x < 0$, $F_V(x) = 0$

$\forall x \geq 0$, $F_V(x) = P(V \leq x) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-U) \leq x\right)$

Soit $I_x = \{t \in \mathbb{R} / -\frac{1}{\lambda}\ln(1-t) \leq x\}$.

$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-t) \leq x \Leftrightarrow \ln(1-t) \geq -\lambda x \Leftrightarrow 1-t \geq e^{-\lambda x}$ car $\exp \nearrow$ sur $\mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow t \leq 1 - e^{-\lambda x}$, soit $I_x =]-\infty, 1-e^{-\lambda x}]$

D'où

$$\forall x \geq 0, \quad F_V(x) = \int_{I_x} f_U(t)\,dt \text{ où } f_U \text{ est une densité de } U.$$

$$= F_U(1-e^{-\lambda x}) = 1 - e^{-\lambda x}$$

car $\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$ et $1 - e^{-\lambda x} \in [0,1[\ \forall x \geq 0$.

Conclusion $\boxed{V \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)}$

② Soit $X = \lfloor V \rfloor + 1$; $V(\Omega) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow \lfloor V \rfloor(\Omega) = \mathbb{N} \Rightarrow X(\Omega) = \mathbb{N}^*$

a) X est une variable aléatoire discrète telle que :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(X=n) = P(\lfloor V \rfloor = n-1) = P(n-1 \leq V < n) = F_V(n) - F_V(n-1)$

$= e^{-\lambda(n-1)} - e^{-\lambda n} = (e^{-\lambda})^{n-1}[1 - e^{-\lambda}]$

Conclusion $\boxed{P(X=n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \ \ \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ où } p = 1 - e^{-\lambda}}$.

b) $\sum P(X=n)$ est de même nature que $\sum (1-p)^{n-1}$: série géométrique convergente car $q = 1-p \in]0,1[$

D'où $\sum P(X=n)$ converge et $\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = p\sum_{n=1}^{\infty}(1-p)^{n-1} = p\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^k$ avec $k = n-1$

Soit $\sum_{n=1}^{\infty} P(X=n) = p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{p}{p} = 1$ □.

c) $\sum nP(X=n)$ converge absolument $\Leftrightarrow \sum nP(X=n)$ converge car $nP(X=n) \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.

$\sum nP(X=n) = \sum np(1-p)^{n-1}$ est de même nature que $\sum n(1-p)^{n-1}$ qui est une série géométrique convergente car $q = 1-p \in]0,1[$.

Conclusion $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } E(X) = p \cdot \sum_{n=1}^{\infty} nq^{n-1} = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}}$.