Exercice 12 $U, V \sim \mathcal{U}_{[0,1[}$ donc $f_U(x) = f_V(x) = \mathbb{1}_{[0,1[}(x)$

1) Montrons que U^2 est une variable aléatoire à densité.

(i) $U(\Omega) = [0;1[$ donc U^2 est bien définie et $U^2(\Omega) = [0,1[$

(ii) $\forall x < 0,\ F_{U^2}(x) = 0$
$\forall x \geq 1,\ F_{U^2}(x) = 1$

et

$\forall\, 0 \leq x < 1,\ F_{U^2}(x) = \mathbb{P}(U^2 \leq x) = \mathbb{P}(-\sqrt{x} \leq U \leq \sqrt{x})$
$= F_U(\sqrt{x}) - F_U(-\sqrt{x})$
$= F_U(\sqrt{x})$ car U prend ses valeurs dans $[0,1[$

D'où
$$\boxed{F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$$

F_U est continue par morceaux sur $]-\infty,0[$, $]0,1[$ et $]1,+\infty[$

et $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} F_{U^2}(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} F_{U^2}(x) \\ \lim\limits_{x\to 1^-} F_{U^2}(x) = \sqrt{1} = 1 = \lim\limits_{x\to 1^+} F_{U^2}(x) \end{cases}$

D'où F_{U^2} est continue sur $\mathbb{R}$ (de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$)

Conclusion $\boxed{U^2 \text{ est une variable aléatoire à densité}}$

On obtient une densité f_{U^2} par dérivation de F_{U^2} :

$\forall x \in]0,1[,\ f_{U^2}(x) = F'_{U^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ ⚠ F_{U^2} non dérivable en 0 et 1 → On pose $f_{U^2}(0) = 0 = f_{U^2}(1)$

Conclusion : $\boxed{f_{U^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)}$

On note que V^2 a même densité que U^2 puisque V suit la même loi que U

2) U et V sont indépendantes donc U^2 et V^2 également d'après le lemme de coalition

Donc, $Z = U^2 + V^2$ admet une densité définie par:

$\forall t \in \mathbb{R},\ f_Z(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{U^2}(u) \cdot f_{V^2}(t-u)\,du$ d'après l'énoncé.

3) Une simulation Python de la v.a.r. Z est immédiate:

```
def simulZ():
    return rdm.random()**2 + rdm.random()**2
```

On cherche maintenant à estimer $P(Z\leq 1)$ et on peut pour ça utiliser une approche "fréquentiste" (ou Loi Faible des Grands Nombres) en répétant un nombre m de fois (m supposé grand) l'appel à la fonction 'simulZ()' et en renvoyant la fréquence des succès $(Z\leq 1)$.

Soit :

```
def estimProbaZ(m=10000):
    c=0
    for k in range(m):
        if simulZ()<=1:
            c+=1
    return c/m
```

L'exécution de cette fonction renvoie $\boxed{P(Z\leq 1)\simeq 0.78}$

(4) a) On peut commencer par noter que $U^2(\Omega)=[0,1[=V^2(\Omega)$
Donc $Z(\Omega)=[0,2[$

. En conséquence $h(x)=0\ \forall x\notin[0,2[$ où h désigne une densité de Z.

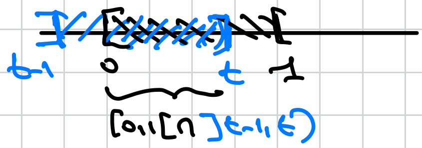
. $\forall x\in[0,1)$,

$$h(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{U^2}(u)f_{V^2}(t-u)\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}\mathbb{1}_{[0,1[}(u)\cdot\frac{1}{2\sqrt{t-u}}\underbrace{\mathbb{1}_{[0,1[}(t-u)}_{\substack{=1 \text{ si } 0\leq t-u<1\\ =1 \text{ si } t-1<u\leq t}}\,du$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\sqrt{u}}\frac{1}{2\sqrt{t-u}}\mathbb{1}_{[0,1[}(u)\cdot\mathbb{1}_{]t-1,t]}(u)\,du$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{t-u}}\mathbb{1}_{[0,1[\cap]t-1,t)}(u)\,du$$

: Dessin !



$$=\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{t-u}}\mathbb{1}_{[0,t]}(u)\,du$$

$$=\frac{1}{4}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t-u}}\,du.$$

Conclusion $\boxed{\forall\, 0\leq x<1,\ h(x)=\frac{1}{4}\int_0^x\frac{1}{\sqrt{x-t}}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}\,dt}$

(on reprend les notations de l'énoncé)

b) On fait le changement de variable : $y=\frac{t}{x}=\varphi(t)$
$\varphi\in C^1([0,x])$ et φ strictement croissante

Donc
$h(x)$ est de même nature que $J(x)=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x-xy}}\frac{1}{\sqrt{xy}}(x\,dy)$

h est définie pour tout x réel (densité de probabilité)

Donc $J(x)$ converge et $\boxed{h(x)=J(x)=\frac{1}{4}\int_0^1\frac{dy}{\sqrt{1-y}\sqrt{y}}}$

(4) c) Comme recommandé, on va utiliser le changement de variable $y = \sin^2(u)$

On note pour ça que $\varphi : u \mapsto \sin^2(u)$ est une bijection de $[0,\pi/2)$ sur $[0,1)$, strictement croissante, de classe C^1 sur $[0,\pi/2)$ dont la dérivée ne s'annule pas sur $]0,\pi/2[$

(Pour rappel, $(f^{-1})'(y) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ ....)

On en déduit que :

$y \mapsto \varphi^{-1}(y) = u$ est une fonction changement de variable de classe C^1 sur $]0,1[$, strictement $\nearrow$ à valeurs dans $]0,\pi/2[$

Par ailleurs,

$$dy = 2\sin(u)\cos(u)\,du.$$

D'après le théorème de changement de variable sur des intégrales généralisées convergentes, on a :

$$h(x) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin(u)\cos(u)\,du}{\sqrt{1-\sin^2(u)}\,\sqrt{\sin^2(u)}} = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{2\sin(u)\cos(u)}{|\cos(u)|\cdot|\sin(u)|}\,du$$

Or $\cos(u)\geq 0$ et $\sin(u)\geq 0$ pour tout $u\in[0,\pi/2)$

donc,

$$h(x) = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2}2\,du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}du = \frac{1}{2}(\pi/2)$$

Conclusion : $\boxed{\forall x\in]0,1[,\ h(x) = \frac{\pi}{4}}$

d) Interprétation. $P(Z\leq 1) = \int_{-\infty}^{1} h(x)\,dx$

Mais $Z(\Omega) = [0,2]$ donc h est nulle sur $]-\infty,0]$.

D'où, d'après la relation de Chasles :

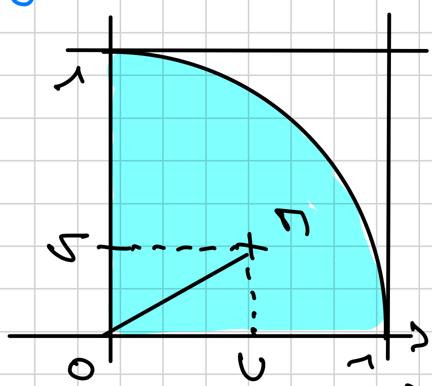
$$P(Z\leq 1) = \int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\pi}{4}\,dx = \frac{\pi}{4}$$

[conforme à l'estimation Python en (3)]

On retiendra que le couple (U,V) où $U,V \sim \mathcal{U}_{[0,1[}$ correspond à choisir un point M au hasard dans le carré $[0,1]\times[0,1]$.

et $Z = U^2+V^2 = OM^2$

(Z est la distance au carré de O à M)



$(Z\leq 1)$ est réalisé si, et seulement si, $(OM^2\leq 1)$, c'est-à-dire si M est dans le quart de disque de centre O et de rayon 1.

Intuitivement, $\boxed{P(OM^2\leq 1) = \dfrac{\text{Aire (1/4 disque)}}{\text{Aire (carré)}} = \dfrac{\pi/4}{1^2} = \dfrac{\pi}{4}}$