Exercice 11

Rappel : $X(\Omega) = \mathbb{R}_+ = Y(\Omega)$; toutes les deux ont pour densité :

$$f : t \mapsto e^{-t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

① Par linéarité de l'espérance :

$$E(U) = \frac{1}{2}E(X+Y) = \frac{1}{2}\left(E(X)+E(Y)\right) = \frac{1}{2}(1+1) = \frac{2}{2} = 1$$

et $V(U) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 V(X+Y) = \frac{1}{4}\left(V(X)+V(Y)\right)$ car X et Y indépendantes

$$= \frac{1}{4}(1+1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

De même, $\begin{cases} E(V) = \frac{1}{2}\left(E(X) - E(Y)\right) = 0 \\ V(V) = \frac{1}{4}V(X-Y) = \frac{1}{4}\left(V(X)+V(Y)\right) = \frac{1}{4}(1+1) = \frac{1}{2}. \end{cases}$

Conclusion $\boxed{E(U) = 1/2 \;;\; E(V) = 0 \;;\; V(U) = 1/2 = V(V)}$

② Posons $S_1 = X+Y$ et h_1 une densité de S_1.

Alors :

(i) $S_1(\Omega) = \mathbb{R}_+$ car $X(\Omega) = \mathbb{R}_+ = Y(\Omega)$

(ii) $\forall t<0,\ h_1(t) = 0$

$$\forall t \geq 0,\ h_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(t-y)\cdot f_Y(y)\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-y)}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t-y)\,e^{-y}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\,dy$$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t-y)}_{=1 \text{ si } t-y\geq 0 \Rightarrow y\leq t}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\,dy$$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{]-\infty,t]}(y)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(y)\,dy$$

car $]-\infty,t] \cap \mathbb{R}_+$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{]-\infty,t]\cap\mathbb{R}_+}(y)\,dy$$

$$= e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(y)\,dy = e^{-t}\int_0^t dy = t e^{-t}$$

Relation de Chasles

Donc $\boxed{f_1(t) = \begin{cases} t e^{-t} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}}$

Déterminons la loi de $U = \frac{1}{2}S_1$:

(i) On note que $U(\Omega) = \mathbb{R}_+$ car $S_1(\Omega) = \mathbb{R}_+$

D'où $\forall x<0,\ F_U(x)=0$

et $\forall x\geq 0,\ F_U(x)=\mathbb{P}(U\leq x)=\mathbb{P}(\frac{1}{2}S\leq x)=\mathbb{P}(S\leq 2x)$
$=F_{S_1}(2x)$

On obtient une densité de U par dérivation de F_U.

Conclusion $\boxed{f_U(x)=\begin{cases}2F_{S_1}'(2x)=2h_1(2x)=4xe^{-2x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}}$

③ Pour déterminer une densité de $V=\frac{1}{2}(X-Y)$ on va opérer en 3 temps :

a) on pose $Z=-Y$ et on cherche une densité de Z.

b) on cherche une densité de $X-Y=X+Z$ en utilisant la formule du produit de convolution car X et Y étant indépendantes, X et $Z=-Y$ le sont également.

c) on obtient la loi de $V=1/2\,S_2$ où $S_2=X+Z$.

---

a) Soit $Z=-Y$.

(i) $Z(\Omega)=\mathbb{R}-$ car $Y(\Omega)=\mathbb{R}+$

(ii) $\forall x>0,\ f_Z(x)=0$ [Puisque le support de Z est $\mathbb{R}^-$...]

(iii) $\forall x\leq 0$,
$F_Z(x)=\mathbb{P}(Z\leq x)=\mathbb{P}(-Y\leq x)=\mathbb{P}(Y\geq -x)=1-\mathbb{P}_Y(-x)$
$=1-F_Y(-x)$

(iv) on obtient une densité de Z par dérivation de F_Z.

D'où $f_Z(x)=+F_Y'(-x)=f_Y(-x)=e^{x}$ si $x\leq 0$.

ou encore, $\boxed{f_Z(x)=e^{x}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(x)}$

b) On pose $S_2=X+Z$

(i) $S_2(\Omega)=\mathbb{R}$ car $X(\Omega)=\mathbb{R}+$ et $Z(\Omega)=\mathbb{R}-$

(ii) $\forall x\in\mathbb{R}$,

$$h_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f_X(t-y)\,f_Z(y)\,dy=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(t-y)}\underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(t-y)}_{=\mathbb{1}_{]-\infty,t]}(y)\text{ d'après ②}}e^{y}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(y)\,dy$$

$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2y}\,\mathbb{1}_{]-\infty,t]}(y)\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^-}(y)\,dy$$

$$=e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2y}\,\mathbb{1}_{]-\infty,t]\cap\mathbb{R}^-}(y)\,dy$$

1er cas $t<0$ alors $]-\infty,t]\cap\mathbb{R}^-=]-\infty,t]$

donc $h_2(t)=e^{-t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{2y}\,\mathbb{1}_{]-\infty,t]}(y)\,dy=e^{-t}\int_{-\infty}^{t}e^{2y}\,dy$

Made with Goodnotes

avec $\lim\limits_{a\to-\infty} \int_a^t e^{2y}\,dy = \lim\limits_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2y}\right]_a^t = \lim\limits_{a\to-\infty} \left(\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{2a}\right)$

D'où $\int_{-\infty}^{t} e^{2y}\,dy$ converge et vaut $\frac{1}{2} e^{2t}$.

Donc, si $t<0$, $h_2(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{2} e^{2t}\right) = \frac{1}{2} e^{t}$

2ème cas : si $t \geq 0$, alors $]-\infty, t] \cap \mathbb{R}_- =]-\infty, 0]$

Donc

$$h_2(t) = e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2y}\, \mathbb{1}_{]-\infty,0]}(y)\,dy = e^{-t} \int_{-\infty}^{0} e^{2y}\,dy$$

R. de Chasles

$$= e^{-t} \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} e^{2y}\right]_a^0$$

$$= e^{-t} \lim_{a\to-\infty} \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{2a}\right] = e^{-t}/2$$

Résumons... $h_2(t) = \begin{cases} e^{t}/2 & \text{si } t<0 \\ \dfrac{e^{-t}}{2} & \text{si } t\geq 0 \end{cases} = \dfrac{e^{-|t|}}{2}, \ \forall t\in\mathbb{R}$

c) Déterminons la loi de $V = \frac{1}{2} S_2 = \frac{1}{2}(X-Y)$:

(i) $V(\Omega) = \mathbb{R}$ car $S_2(\Omega) = \mathbb{R}$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$F_V(x) = P(V \leq x) = P\left(\tfrac{1}{2} S_2 \leq x\right) = P(S_2 \leq 2x) = F_{S_2}(2x)$$

(iii) on obtient une densité de V par dérivation de F_{S_2}

Soit, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$f_V(x) = F_V'(x) = 2F_{S_2}'(2x) = 2\,h_2(2x)$$

Conclusion

$$\boxed{f_V(x) = \begin{cases} e^{2x} & \text{si } x<0 \\ e^{-2x} & \text{si } x\geq 0 \end{cases} = e^{-2|x|} \quad \forall x\in\mathbb{R}}$$