

<b>Programme de colle quinzaine 9 - semaine 2</b>
---

Les questions possibles sont les suivantes :

- **Q1 : Loi normale.** Théorème 2.3 :  $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \frac{X - m}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ .
- **Q2 : Loi normale centrée réduite.** Espérance et variance.
- **Q3 : Somme de variables aléatoires indépendantes** (la formule du produit de convolution sera rappelée) : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois uniformes sur  $[0, 1]$ .
- **Q4 : Somme de variables aléatoires indépendantes** (la formule du produit de convolution sera rappelée) : Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de même paramètre  $\lambda$ .
- **Q5 :** Soit  $f$ , endomorphisme d'un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ . Définir  $E_\lambda(f)$  et montrer que c'est un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel.
- **Q6 :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $\dim(E) = n$  et  $A = \mathcal{M}_\mathcal{B}(f)$  où  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ . Justifier l'équivalence :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Leftrightarrow \text{rg}(A - \lambda I_n) < n$$

- **Q7 :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ , bijectif. Alors :

$$\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \frac{1}{\lambda} \in \text{Sp}(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$

- **Q8 :** Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ .  $\lambda \in \text{Sp}(f) \Rightarrow \lambda^n \in \text{Sp}(f^n)$  et  $E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$ .

### Exercices :

On donnera, au choix, un ou deux exercices sur l'un des points ci-dessous.

- Formule du produit de convolution.  
✍ : Toute simulation Python des variables aléatoires en jeu sera la bienvenue.
- valeurs propres, vecteurs propres et diagonalisation.

**Bonnes colles !**