9 Valeurs propres, vecteurs propres

Les objectifs : « Diagonaliser une matrice ; calculer les puissances d'une matrice diagonalisable (avec ou sans moyens de calculs) ».

✐ Dans l'ensemble du chapitre, $\mathbb{K}$ désignera aussi bien $\mathbb{R}$ que $\mathbb{C}$.

1 Éléments propres

1.1 Valeurs propres, vecteurs propres d'un endomorphisme

Définition

Définition 1.1 : valeurs propres - vecteurs propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

① *On dit que le scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$ *est une* `valeur propre` *de* f *si, et seulement si :*

$$\exists u \in E, u \neq 0 / f(u) = \lambda u$$

On dira que u *est un* `vecteur propre` *de* f *associé à la valeur propre* λ.

② *On dit que* u *est un* `vecteur propre` *de* f *si, et seulement si :*

$$u \in E, u \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / f(u) = \lambda u$$

Notation : L'ensemble des valeurs propres de f s'appelle le `spectre` de f et se note $\mathrm{Sp}(f)$.

Propriété

prop.1.1. Sous-espace vectoriel propre

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ *de valeur propre* λ.
L'ensemble formé des vecteurs propres associés à la v.p. λ **et** *du vecteur nul* 0_E *est un sous-espace vectoriel de* E.
On l'appelle le `sous-espace vectoriel propre` *associé à* λ *et on le note* E_λ.

$$E_\lambda = \{u \in E / f(u) = \lambda u\}$$

Remarque 1 : $\dim E_\lambda = \dim E - \mathrm{rg}(f - \lambda id_E)$.

Propriété

prop.1.2. Caractérisation des valeurs propres

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ *où* $\dim E$ *finie.*

$$\begin{array}{rcll} (1)\ \lambda \in Sp(f) & \Leftrightarrow & E_\lambda \neq \{0_E\} & (2) \\ & \Leftrightarrow & \dim E_\lambda \geq 1 & (3) \\ & \Leftrightarrow & f - \lambda id_E \text{ non injective} & (4) \\ & \Leftrightarrow & f - \lambda id_E \text{ non bijective} & (5) \end{array}$$

Cas particulier : $0 \in \mathrm{Sp}(f) \Leftrightarrow f$ non injective $\Leftrightarrow f$ non bijective. Dans ce cas $\boxed{E_0 = \mathrm{Ker} f}$
En conséquence, f injectif si, et seulement si $0 \notin \mathrm{Sp}(f)$

1.2 Valeurs propres, vecteurs propres, ss-espaces propres d'une matrice carree

Définition

Définition 1.2 : valeurs propres - vecteurs propres d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

① *On dit que le scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une* `valeur propre` *de A si, et seulement si :*

$$\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 / AX = \lambda X$$

On dira que X est un `vecteur propre` *de A associé à la valeur propre λ.*

② *On dit que X est un* `vecteur propre` *de A si, et seulement si :*

$$X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0 \text{ et } \exists \lambda \in \mathbb{K} / AX = \lambda X$$

Notation : L'ensemble des valeurs propres de A s'appelle le `spectre` de A et se note $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Propriété

prop.1.3. Sous-espace vectoriel propre

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de valeur propre λ.
L'ensemble formé des vecteurs propres associés à la valeur propre λ **et** *du vecteur nul 0_E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. On l'appelle le* `sous-espace vectoriel propre` *associé à λ et on le note $E_\lambda(A)$.*

$$E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) / AX = \lambda X\}$$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Il est possible d'interpréter A comme matrice d'un endomorphisme E de $\mathbb{K}^n$. Dès lors, il y a coïncidence entre les éléments propres de A et ceux de l'endomorphisme qu'elle représente.

Propriété

prop.1.4. Caractérisation des valeurs propres

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{array}{rcll} (1)\ \lambda \in Sp(f) & \Leftrightarrow & (A - \lambda I)X = 0 \text{ admet au moins une solution non nulle} & (2) \\ & \Leftrightarrow & A - \lambda I \text{ est non inversible} & (3) \\ & \Leftrightarrow & rg(A - \lambda I) < n & (4) \end{array}$$

Exemple

Exemple 1.1

Déterminer le spectre et les sous-espaces vectoriels propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par :

$$f : (x, y) \longmapsto \frac{1}{2}(x + y, x + y)$$

Propriété

prop.1.5.

Si A est une matrice triangulaire, alors ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux.

Exemple

Exemple 1.2

Déterminer les éléments propres des deux endomorphismes suivants :

① $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)/f(x,y,z) = (x+5y+6z, 2y+4z, 2z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

② $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])/g(P) = P + XP'$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

Propriété

prop.1.6.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$, bijectif et A matrice carrée d'ordre n inversible. Alors :

$$\lambda \in Sp(f) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in Sp(f^{-1}) \text{ et } E_\lambda(f) = E_{1/\lambda}(f^{-1})$$

$$\lambda \in Sp(A) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} \in Sp(A^{-1}) \text{ et } E_\lambda(A) = E_{1/\lambda}(A^{-1})$$

Propriété

prop.1.7.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et A matrice carrée d'ordre n. Alors :

$$\lambda \in Sp(f) \Rightarrow \lambda^n \in Sp(f^n) \text{ et } E_\lambda(f) \subset E_{\lambda^n}(f^n)$$

$$\lambda \in Sp(A) \Rightarrow \lambda^n \in Sp(A^n) \text{ et } E_\lambda(A) \subset E_{\lambda^n}(A^n)$$

Propriété

prop.1.8.

A et A^T ont même valeurs propres et $\forall \lambda \in Sp(A) = Sp(A^T)$, $\dim(E_\lambda(A)) = \dim\left(E_\lambda(A^T)\right)$

1.3 Endomorphisme diagonalisable - matrice diagonalisable

✐ Dans la suite, on supposera que E est un espace vectoriel de dimension finie égale à n.

Propriété

prop.2.1.

Une famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Propriété

prop.2.2.

Une famille finie obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.

Conséquence : Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée d'ordre n admet au plus n valeurs propres distinctes et la somme des dimensions des sous-espaces propres est inférieure ou égale à n.

Définition

Définition 2.1 : Endomorphisme diagonalisable

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f et dite `diagonalisable` si, et seulement si, il existe une base dans laquelle la matrice de f est diagonale.

Propriété

prop.2.3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. f et `diagonalisable` si, et seulement si, il existe une base $\mathcal{B}'$ formée de vecteurs propres de f.

Définition

Définition 2.2 : Matrice diagonalisable

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A et dite `diagonalisable` si, et seulement si, il existe une une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible et une matrice diagonale $K \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que :

$$A = PDP^{-1}$$

Propriété

prop.2.4. Une condition **nécessaire et suffisante** *de diagonalisation*

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ est diagonalisable si, et seulement si, la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à n.

Exemple

Exemple 2.1

Dire dans chacun des cas suivants si la matrice A est diagonalisable :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ;\ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ;\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

⚠ On retiendra que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\}$, alors :

A est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.

Propriété

prop.2.5. Une condition **suffisante** *de diagonalisation*

Un endomorphisme en dimension n ou une matrice carrée $n \times n$ ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Méthode

Calcul de puissances

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ diagonalisable. Alors A est semblable à une matrice D diagonale et il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversible telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = PD^nP^{-1}$$