Exercice 5

$$f_r(x) = \frac{\alpha}{\pi(x^2+r)} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

① • f_r est positive sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \geq 0$.

• f_r est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto \frac{1}{x^2+r}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction continue ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}$.

• $\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha}{\pi(t^2+r)}\,dt$; on note que $t \mapsto \frac{1}{t^2+r}$ est paire.

Donc on étudie :

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\pi(t^2+r)}\,dt$$

Note : on peut montrer sa convergence en notant $0 < \frac{1}{t^2+r} < \frac{1}{t^2}$ et $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2}\,dt$ CV $\Rightarrow \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^2+r}$ CV par TCvCIFP.

De plus, $t \mapsto \frac{1}{t^2+r}$ continue sur $[0,1)$ donc, d'après la rel° de Chasles :

$J = \int_0^{\infty} \frac{\alpha}{\pi(t^2+r)}\,dt$ CV et donc $\int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)\,dt$ CV et vaut $2J$

On peut aussi se passer de la remarque précédente et montrer la convergence de J tout en faisant le calcul...

Soit $J(x) = \int_0^x \frac{\alpha}{\pi(t^2+r)}\,dt = \frac{\alpha}{\pi}\frac{1}{r}\int_0^x \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{r}}\right)^2+1}$

$$= \frac{\alpha}{\pi r}\left[\sqrt{r}\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{r}}\right)\right]_0^x = \frac{\alpha}{\pi r}\sqrt{r}\arctan\left(\frac{x}{\sqrt{r}}\right)$$

D'où $\lim\limits_{x\to\infty} J(x) = \frac{\alpha\sqrt{r}}{\cancel{\pi} r}\cdot\frac{\cancel{\pi}}{2} = \frac{\alpha\sqrt{r}}{2r}$

Donc J CV et $J = \frac{\alpha\sqrt{r}}{2r} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f_r(t)\,dt$ CV et vaut $\frac{\alpha\sqrt{r}}{r}$

Conclusion $\boxed{f_r \text{ est une densité si } \frac{\alpha\sqrt{r}}{r} = 1 \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{r}}$

② $X_r(\Omega) = \mathbb{R}$ (support de X_r) ; Donc

$\forall x \in \mathbb{R},\ F_r(x) = \mathbb{P}(X_r \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_r(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x} \frac{\sqrt{r}}{t^2+r}\,dt$

$$= \frac{1}{\pi}\lim_{a\to-\infty}\int_a^x \frac{\sqrt{r}}{t^2+r}\,dt = \frac{1}{\pi}\lim_{a\to-\infty}\left[\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{r}}\right)\right]_a^x$$

Made with Goodnotes

D'où $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \to -\infty} \left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) - \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{\sqrt{\lambda}}\right) \right]$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{\pi}{2} \right]$$

Conclusion $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_\lambda(x) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{\lambda}}\right) + \frac{1}{2}}$

⚠ Remarque : On pensera à vérifier que F_λ est continue sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions continues, que $\lim_{-\infty} F_\lambda(x) = 0$ et $\lim_{+\infty} F_\lambda(x) = 1$

③ On étudie $\int_{-\infty}^{\infty} |t| f_\lambda(t)\,dt$ et comme $t \mapsto \frac{\sqrt{\lambda}\,|t|}{\pi(t^2+\lambda)}$ paire il suffit d'étudier la convergence de $J_2 = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\lambda}\, t}{\pi(t^2+\lambda)}\,dt$.

Soit $J_2(x) = \int_0^x \frac{\sqrt{\lambda}\,t}{\pi(t^2+\lambda)}\,dt$

on a :

$$J_2(x) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\left[\frac{1}{2}\ln(\underbrace{t^2+\lambda}_{>0})\right]_0^x = \frac{\sqrt{\lambda}}{2\pi}\left[\ln(x^2+\lambda) - \ln(\lambda)\right]$$

or $\lim_{x\to\infty} \ln(x^2+\lambda) = +\infty$ donc $\lim_{x\to\infty} J_2(x) = +\infty$

D'où J_2 DV.

Conclusion $\boxed{E(X_\lambda) \text{ n'existe pas}}$

④ X suit la loi de Cauchy de paramètre a si X admet pour densité $f_{a^2} : x \mapsto \frac{a}{\pi(x^2+a^2)}$

a) X_1 suit une loi de Cauchy de paramètre 1, autrement dit admet pour densité : $f_1 \,/\, f_1(x) = \frac{1}{\pi(x^2+1)}$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

On pose $T = aX_1$

Donnons la loi de T :

(i) $T(\Omega) = \mathbb{R}$ car $X_1(\Omega) = \mathbb{R}$ et $a > 0$.

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_T(x) = P(aX_1 \leq x) = F_{X_1}(x/a)$ puisque $a > 0$

$$= \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\left(\frac{x/a}{1}\right) + \frac{1}{2} = F_{a^2}(x) \quad \text{D'après ②}$$

Conclusion $\boxed{X \text{ suit une loi de Cauchy de paramètre } a}$

(puisque la fonction de répartition caractérise la loi)

Made with Goodnotes

④ b) $Y = \arctan(X_1)$; on note que $Y(\Omega) = \arctan(X_1(\Omega)) = \arctan(\mathbb{R}) =]-\pi/2, \pi/2[$

Donc,

- $\forall x \leq -\pi/2$, $F_Y(x) = 0$
- $\forall x \geq \pi/2$, $F_Y(x) = 1$
- $\forall x \in]-\pi/2, \pi/2[$, $F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(\arctan(X_1) \leq x)$
  $= P(X_1 \leq \tan(x))$ composition par tan qui est croissante.
  $= F_{X_1}(\tan(x))$

or $F_{X_1}(t) = \dfrac{\arctan(t)}{\pi} + \dfrac{1}{2}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Conclusion
$$\boxed{F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -\pi/2 \\ \frac{x}{\pi} + 1/2 & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 1 & \text{si } x \geq \pi/2 \end{cases}}$$

{!} Penser à vérifier que F_Y est continue sur $\mathbb{R}$!

Par dérivation on obtient une densité f_Y de Y, soit

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{si } -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Autrement dit $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{U}_{]-\pi/2, \pi/2[} \text{ et donc } E(Y) = 0 \ ; V(Y) = \frac{\pi^2}{12}}$

(Remarque : Rien à justifier, c'est une loi au programme).

c) $Z = \dfrac{1}{1+X_1^2}$ avec $X_1(\Omega) = \mathbb{R} \Rightarrow X_1^2(\Omega) = \mathbb{R}_+ \Rightarrow (1+X_1^2)(\Omega) = [1, +\infty[$
D'où $Z(\Omega) =]0, 1]$.

Dès lors,

- $\forall x \leq 0$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\emptyset) = 0$
- $\forall x \geq 1$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\Omega) = 1$
- $\forall 0 < x < 1$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P\left(\frac{1}{1+X_1^2} \leq x\right)$

Soit

$F_Z(x) = P\left(1+X_1^2 \geq \frac{1}{x}\right) = P\left(X_1^2 \geq \frac{1}{x} - 1\right)$ avec $\frac{1}{x} - 1 \geq 0$ car ici $0 < x \leq 1$

$= 1 - P\left(X_1^2 < \frac{1}{x} - 1\right) = 1 - P\left(-\sqrt{\frac{1}{x}-1} < X_1 < \sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)$

$= 1 - \left[F_{X_1}\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) - F_{X_1}\left(-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)\right]$

$= 1 - \left[\frac{1}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) + \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\pi}\arctan\left(-\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) - \cancel{\frac{1}{2}}\right]$

$= 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right)$ car arctan est impaire donc $\arctan(-u) = -\arctan(u)$

Conclusion
$$\boxed{F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}}$$

$\lim\limits_{0^+} \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) = \frac{2}{\pi}\cdot\pi/2 = 1$ et $\lim\limits_{1^-} \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sqrt{\frac{1}{x}-1}\right) = 0 \Rightarrow F_Z$ cont. sur $\mathbb{R}$!

Existence et valeur de $E(Z)$? Comme suggéré, on pense au théorème de transfert...

→ on étudie $\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left|\frac{1}{1+t^2}\right|}_{>0} f_1(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2} = I_4$

on note que $t \mapsto \frac{1}{(1+t^2)^2}$ est paire donc il suffit de montrer que $J_4 = \int_0^{\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ CV pour conclure I_4 CV et vaut $\frac{1}{\pi}.2J_4$

Posons $J_4(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$. Alors :

$$J_4(x) = \int_0^x \frac{1+t^2-t^2}{(1+t^2)^2}dt = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} - \underbrace{\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^2}dt}_{K_4(x)}$$

→ Calculons $K_4(x)$ grâce à une IPP : $\begin{cases} u(t) = t & u'(t) = 1 \\ v'(t) = \frac{t}{(1+t^2)^2} ; & v(t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+t^2} \end{cases}$

en notant que u et v sont de classe C^1 sur $[0, x]$ $\forall x > 0$

Donc

$$K(x) = \left[-\frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2}\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$$

Dès lors,

$$J_4(x) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\operatorname{Arctan}(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}$$

D'où $\lim_{x\to\infty} J_4(x) = \frac{1}{2}.\pi/2 = \pi/4$; ce qui prouve que J_4 CV et vaut $\frac{\pi}{4}$.

Conclusion $\boxed{I_4 \text{ CV prouve que } E(Z) \text{ existe et } E(Z) = \frac{2}{\pi}J_4 = \frac{2}{\pi}\pi/4 = \frac{1}{2}}$

(5) a) $U \sim \mathcal{U}_{[0,1[}$ et $Z = \tan(\pi.U - \pi/2)$.

(i) D'après le cours, $U \sim \mathcal{U}_{[0,1[} \Rightarrow \pi U - \pi/2 \sim \mathcal{U}_{[-\pi/2, \pi/2[}$

(En effet : $0 \leq u < 1 \Rightarrow 0 \leq \pi u < \pi \Rightarrow -\pi/2 \leq \pi u - \pi/2 < \pi/2$ ...)

On souligne le fait que la probabilité que $\pi U - \frac{\pi}{2}$ prenne la valeur $-\pi/2$ est nulle (VAR à densité);

Ainsi on peut considérer que $(\pi U - \pi/2)(\Omega) =]-\pi/2, \pi/2[$ et on peut composer par la fonction 'tangente'

(c'est le sens de " Z est presque sûrement définie"...)

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\tan(\pi U - \pi/2) \leq x)$

$= P(\pi U - \pi/2 \leq \text{Arctan}(x))$ car Arctan bij. st ↗.

$= P(U \leq \underbrace{\frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x) + 1/2}_{\in]0,1[})$ car $-\pi/2 < \text{Arctan}(x) < \pi/2$ $\forall x \in \mathbb{R}$.

$= F_U\left(\frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x) + 1/2\right)$

$= \frac{1}{\pi}\text{Arctan}(x) + 1/2$ car $F_U(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{\text{Z suit la loi de Cauchy de paramètre 1}}$

b) Découle directement de ce qui précède.

```
import random as rdm
from math import *
def cauchy(a):
    return a*tan(pi*rdm.random()-pi/2)
```

c) Il suffit d'augmenter $Y[k]$ de $1/N$ si $x = \text{cauchy}(a) \in [x_{min} + kh ; x_{min} + (k+1)h[$

Comment déterminer l'indice k de l'intervalle concerné ?

On écrit que $x_{min} + kh \leq x < x_{min} + (k+1)h$

$\Leftrightarrow kh \leq x - x_{min} < (k+1)h$

$\Leftrightarrow k \leq \frac{x - x_{min}}{h} < k+1$

$\Leftrightarrow k = \left\lfloor \frac{x - x_{min}}{h} \right\rfloor$: ce qui est proposé à la ligne 12.

Conclusion : Dans la ligne "A compléter" on écrit : `Y[k] += 1/N`.

d) X et Y suivent une même loi de Cauchy de paramètres respectifs a et b, indépendantes.

Soit $Z = X + Y$; hypothèse : Z suit une loi de Cauchy de paramètre a+b ?

Traçons sur une même fenêtre la loi de Z et celle de Cauchy de paramètre a+b...

Et pour sa comparaison écrire une fonction qui simule une somme de 2 lois de Cauchy de paramètre a et b :

```
def histoSommeCauchy(a,b,amin,amax,n,N):
    Y = [0]*n
    h = (amax - amin)/n
    for i in range(N):
        k = floor((cauchy(a)+cauchy(b) - amin)/h)
        if k >= 0 and k<n
            Y[k] += 1/N
    X = []
    for i in range(n):
        X.append(amin + i*h)
    plt.bar(X,Y, alpha = 0.5)
    return X,Y
```

Puis traçons:

```
def compare(a,b, amin, amax, n,N):
    X,Y = histoSommeCauchy(a,b,amin,amax,n,N)
    X,Y = histogrammeCauchy(a+b,amin,amax,n,N)
    plt.show() .
```

Rq On pourra faire l'essai avec a = 1, b = 2

amin, amax = -10, 10

n = 20 , N = 100 000 ...

Conclusion l'hypothèse est plausible.