$\boxed{\text{Exercice 7}}$ $f(x) = \lambda\sqrt{x}\, e^{-x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

1) • Si f est une densité de probabilité, alors, $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geq 0$ Donc $\underline{\lambda \geq 0}$

• Sous cette condition f est continue sur $\mathbb{R}$ puisque continue par morceaux sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{0^-} f = 0 = \lim\limits_{0^+} f$

• Enfin $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lambda \int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx$ [Rel^n. de Chasles]

Plusieurs changements de variables sont possibles mais le plus simple est de se ramener à une densité de la loi normale centrée réduite, à savoir :

$$\varphi_{0,1}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

→ On pose $x = t^2/2$ ou encore $2x = t^2$ et $\underset{= u(x)}{t = \sqrt{2x}}$ pour $x > 0$.

• La fonction u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et strictement croissante sur $]0,+\infty[$

Donc :

$\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx$ est de même nature que $\int_{u(0)}^{\lim\limits_{x\to\infty} u(x)} \frac{t}{\sqrt{2}} e^{-t^2/2} . \underbrace{(t\,dt)} = J$ car $x = \frac{1}{2}t^2$ → $dx = \frac{2}{2} t\,dt$.

$$J = \int_0^{\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2}} e^{-t^2/2}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2}} \int_0^{\infty} t^2 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt$$
$$= \sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} t^2 \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,dt\right)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \mathbb{E}(T^2) \quad \text{où } T \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\mathbb{V}(T) + \mathbb{E}^2(T)\right] \quad \text{d'après Koënig-Huygens}$$
$$= \frac{\sqrt{\pi}}{2}(1 + 0^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

D'où $\int_0^{\infty} \sqrt{x}\, e^{-x}\,dx$ CV et vaut $J = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

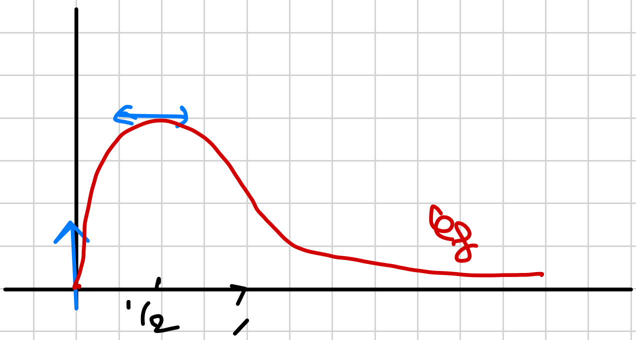
<u>Conclusion</u> $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité pour } \lambda = \frac{2}{\sqrt{\pi}}}$

<u>Etude de f</u> : $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+^*)$ par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x > 0,\ f'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} - \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-x} = \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi}} \frac{1 - 2x}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1/2$

x	0	$1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	‖	0	
$f(x)$	0 ↗	M	↘ 0

avec $M=\sqrt{\frac{2}{\pi e}} \simeq 0.48$



② On pose $I_n=\int_0^{\infty} x^{n+1/2}e^{-x}\,dx$

On obtient la relation de récurrence grâce à une IPP

$\begin{cases} u(x)=x^{n+1/2}\\ v'(x)=e^{-x}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}u'(x)=(n+\frac{1}{2})x^{n-1/2}\\ v(x)=-e^{-x}\end{cases}$, $u,v\in C^1([0,+\infty[)$

On note que $\lim_{x\to+\infty} u(x)v(x)=\lim_{x\to\infty} -\frac{x^{n+1/2}}{e^x}=0$ car $x^a \underset{\infty}{=} o(e^x)$ $\forall a>0$.

Donc

I_n de même nature que $J=\int_0^\infty -(n+\frac{1}{2})x^{n-1/2}e^{-x}\,dx = -(n+\frac{1}{2})I_{n-1}$

D'où, en cas de convergence de I_{n-1} :

$\boxed{I_n}=\lim_{x\to\infty} u(x)v(x)-u(0)v(0) - J = \boxed{(n+1/2)I_{n-1}}$

or $I_0=\int_0^\infty \sqrt{x}e^{-x}\,dx$ cv et vaut $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ donc $\boxed{I_1=\frac{3}{2} I_0=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}}$

et $\boxed{I_2=\frac{5}{2} I_1=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}}$

③ $E(X)$? → on étudie $\int_{-\infty}^{\infty}|t|f(t)\,dt=\int_0^{\infty} t f(t)\,dt=\frac{2}{\sqrt{\pi}}I_1$

Donc $E(X)$ existe et vaut : $\boxed{E(X)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{3\sqrt{\pi}}{4}=\frac{3}{2}}$

$E(X^2)$ existe et vaut $\frac{2}{\sqrt{\pi}}I_2=\frac{15}{4}$

Conclusion D'après la formule de K.H : $\boxed{V(X)=E(X^2)-E^2(X)=\frac{3}{2}}$