11 T.D. Variables aléatoires à densité.

- X admet une densité si, et seulement si, sa fonction de répartition F_X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points. Recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.
- Espérance, théorème de transfert et inégalité de Markov. Variance, écart-type, moments.
- Lois usuelles : Loi uniforme, loi exponentielle et loi normale.
- Somme de variables aléatoires à densité indépendantes.

Exercice 1 : ✶

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} kx(1-x) \text{ si } x \in [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

① Déterminer k pour que f soit la densité d'une variable aléatoire X.

② En déduire la fonction de répartition de X dont on tracera la courbe.

③ Calculer, si elles existent, l'espérance et la variance de X.

Exercice 2 : ✶

Soit un entier naturel $n \geq 2$. Pour chacune des deux fonctions f ci-dessous :

① déterminer la valeur de la constante $\lambda > 0$ pour que f soit une densité de probabilité.

② Déterminer la fonction de répartition associée et donner son graphe.

③ Dire enfin si $\mathbb{E}(X)$ existe et, si c'est le cas, la calculer.

$$a) f(x) = \lambda\,(2 - |x|)\,\mathbf{1}_{[-2,2]}(x); \qquad b) f(x) = \frac{\lambda}{x^n}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

Exercice 3 :✶✶ [Oral Agro 2005]

On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant : $g(t) = \dfrac{b}{2^t}\mathbf{1}_{[1,+\infty[}(t)$ où b est une constante réelle.

① Déterminer b pour que g soit une densité d'une variable aléatoire X.

② Déterminer la loi de $Y = X - 1$. En déduire que X possède et une espérance et une variance qu'on explicitera.

Exercice 4 : ✶✶ Révisions d'analyse et variables à densité

① Déterminer l'ensemble D des réels tels que $e^x - e^{-x} > 0$.

On définit la fonction f par : $\forall x \in D,\ f(x) = \ln\left(e^x - e^{-x}\right)$ et on note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

② **a.** Étudier les variations de f et donner les limites de f aux bornes de D.
b. En déduire l'existence d'un unique réel α vérifiant $f(\alpha) = 0$, puis donner la valeur exacte de α.

c. Montrer que le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse α vaut $\sqrt{5}$.

③ **a.** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$.

b. En déduire l'équation de l'asymptote (Δ) à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$.

c. Donner la position relative de (Δ) et (C).

④ Donner l'allure de la courbe (C) en faisant figurer les droites (Δ) et (T).
On admettra que $\alpha \simeq 0,5$ et que $\sqrt{5} \simeq 2,2$.

⑤ Soit λ un réel, on note g_λ la fonction définie par : $\begin{cases} g_\lambda(x) = 0 & \text{si } x < \alpha \\ g_\lambda(x) = \dfrac{\lambda}{e^{2x}-1} & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}$.

a. On pose $h(x) = f(x) - x$. Après avoir calculer $h'(x)$, déterminer λ en fonction de α pour que g_λ soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.

b. Donner la fonction de répartition G_λ de X.

Exercice 5 : ✶✶✶ [Agro 2007] et [Agro 2017]

Soit r un réel strictement positif. On considère la fonction f_r définie sur $\mathbb{R}$ par : $f_r(x) = \dfrac{\alpha}{\pi(x^2+r)}$

① Déterminer la valeur de α pour que f_r soit une densité de probabilité. On désignera dans la suite par X_r une variable aléatoire réelle dont f_r est une densité.

② Préciser la fonction de répartition de X_r.

③ Montrer que X_r n'admet pas d'espérance.

④ Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a^2 = r$. On dira que X suit une loi *de Cauchy* de paramètre a si elle admet pour densité f_{a^2}.

a. X_1 suit une loi de Cauchy de paramètre 1. On pose $T = aX_1$. Donner la loi de T.

b. Soit $Y = \arctan(X_1)$; Déterminer la loi de Y, son espérance et sa variance.

c. Soit $Z = \dfrac{1}{1+X^2}$; Déterminer la fonction de répartition de Z ; Calculer $\mathbb{E}(Z)$ en pensant à appliquer le théorème de transfert.

⑤ **a.** U est une variable aléatoire dont la loi est uniforme sur $[0,1[$. On pose $Z = \tan\left(\pi U - \dfrac{\pi}{2}\right)$. Montrer que Z est presque sûrement définie et donner la loi de Z.

b. Écrire une fonction Python `cauchy(a)` donnant en sortie un résultat aléatoire coïncidant avec une variable aléatoire suivant une loi de Cauchy de paramètre a.

c. on considère le code Python suivant :

```python
import matplotlib.pyplot as plt

def histogrammeCauchy(a, xmin, xmax, n, N):
    '''
    L'intervalle [xmin, xmax] est divise en n parties
    On lance N simulations de loi de Cauchy puis
    on calcule la fréquence d'apparition dans chacune des n parties.
    '''
    Y = [0]*n
    h = (xmax-xmin)/n
    for i in range(N):
        k = floor((cauchy(a)-xmin)/h)
        if k >= 0 and k < n:
            Y[k]... # A COMPLETER
    X = []
    for i in range(n):
        X.append(xmin+i*h)
    plt.bar(X, Y, alpha=0.5) # pour la transparence
    return X, Y
```

Soit l'intervalle $I_k = \left[x_{min} + \frac{k}{n}, x_{min} + \frac{k+1}{n}\right]$.
Compléter cette fonction pour obtenir un histogramme représentant pour chaque intervalle I_k la proportion des résultats (parmi les N simulations de loi de Cauchy de paramètre a) contenus dans I_k.

d. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement une loi de Cauchy de paramètre a et une loi de Cauchy de paramètre b. On émet l'hypothèse suivante :

$$Z = X + Y \text{ suit une loi de Cauchy de paramètre } a + b$$

Écrire un programme Python permettant de visualiser sous forme de diagrammes la loi de $X + Y$ ainsi qu'une loi de Cauchy de paramètres $a + b$. Quelle conclusion peut-on faire ?

Exercice 6 ✶✶✶ : Variables aléatoires à densité et discrètes

Soit U une variable aléatoire réelle définie sur $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ de loi uniforme sur $[0, 1[$. Soit $\lambda > 0$.

① Quelle est la loi de $V = -\frac{1}{\lambda} ln(1 - U)$?

② Soit $X = \lfloor V \rfloor + 1$ où $\lfloor V \rfloor$ désigne la partie entière de V.

a. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ où $p = 1 - e^{-\lambda} \in]0, 1[$

b. Vérifier qu'on a ainsi déterminé une loi de probabilité, à savoir que la série $\sum \mathbb{P}(X = n)$ converge et que sa somme vaut 1.

c. On admet que $\mathbb{E}(X)$ existe si la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et que sous cette condition $\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$. Montrer l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et la calculer.

Exercice 7 : ✶✶

Soit X une variable aléatoire réelle dont une densité de probabilité est f définie par :

$$f(x) = \lambda\sqrt{x}e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x) = \begin{cases} \lambda\sqrt{x}e^{-x} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

① Déterminer λ grâce à un changement de variable de votre choix (plusieurs méthodes sont possibles dont une qui utilise les propriétés de la loi normale...) ; Construire la courbe représentant les variations de f.

② En posant $I_n = \int_0^{+\infty} x^{n+1/2}e^{-x}dx$, $n \in \mathbb{N}$, trouver une relation de récurrence entre les termes de la suite $(I_n)_{n\geq 0}$. Calculer I_1 et I_2.

③ En déduire l'espérance et la variance de X.

Exercice 8 : ✶ Révisions de statistiques et variables à densité

Dans le cadre d'essais thérapeutiques, vingt souris de laboratoire on été traitées à titre expérimental et suivies jusqu'à leur décès. La série des durées de survie, mesurées en jours à partir de la date de l'intervention jusqu'à celle du décès est la suivante :

Durée	25	143	238	16	54	41	172	410	71	91
Durée	112	29	149	78	325	38	14	92	114	53

① Déterminer la liste `Fc` des fréquences cumulées des durées de survie et tracer la fonction de répartition empirique associée aux observations du tableau précédent. Que penser de l'hypothèse : *la durée de survie des souris suit une loi exponentielle ?*

② Calculer la moyenne m, la variance σ^2 et la médiane empirique m_e de la série.

③ En supposant que les données suivent effectivement une loi exponentielle, on souhaite déterminer la valeur du paramètre λ qu'on peut raisonnablement proposer.

a. Montrer que si X suit une loi exponentielle, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ F_X(x) = y \Leftrightarrow x = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)$$

b. Proposez un changement de variable sur `Fc` permettant d'obtenir une valeur de λ par la méthode des moindres carrés. Le vérifier graphiquement et rappeler les formules permettant d'obtenir les coefficient a et b de la droite de régression.

c. En déduire une valeur approchée de λ et tracer sur un même graphe la fonction de répartition de X pour cette valeur de λ ainsi que les fréquences cumulées expérimentales.
Validez votre simulation en comparant $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$ respectivement à m et à σ^2.

Exercice 9 : ✶

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite. On pose $Y = X^2$.
Déterminer une densité de Y ainsi que son espérance et sa variance dont on prendra soin de justifier l'existence.

Exercice 10 ✶✶✶

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$$

① **a.** Vérifier que f est une densité de probabilité de variable aléatoire réelle.
On dit qu'une variable aléatoire réelle suit la loi *logistique standard* si elle admet f pour densité.
On notera dans la suite de l'exercice X une variable aléatoire suivant la loi logistique standard.

b. Déterminer la fonction de répartition de X.

② **a.** Soit U une variable aléatoire réelle suivant une loi uniforme sur $]0,1[$.
Montrer que $\ln\left(\dfrac{U}{1-U}\right)$ suit la loi logistique standard.

b. Écrire une fonction Python `logis()` qui simule la variable aléatoire X.

c. Écrire une fonction `esp_logis()` qui renvoie une valeur approchée de l'espérance de X.
Que peut-on conjecturer ?

d. En supposant cette conjecture comme exacte, écrire une fonction Python `var_logis()` qui renvoie une valeur approchée de la variance de X.

③ Montrer que X admet une espérance et que : $\mathbb{E}(X) = 0$.

④ On admet que $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} = \frac{\pi^2}{12}$.

a. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que X admet une variance et que :

$$\mathbb{V}(X) = 4\int_0^{\infty} \frac{x}{1+e^x}dx = 4\int_0^{\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx$$

b. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx + I_n \text{ où } I_n = (-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-(n+2)x}}{1+e^{-x}}dx$$

c. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-(k+1)x}dx$

d. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

e. Déterminer $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 11 : ✶✶

On considère deux variables aléatoires X et Y, indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre 1.
On note $U = \frac{1}{2}(X+Y)$ et $V = \frac{1}{2}(X-Y)$

① Calculer l'espérance et la variance de U et de V.

② Déterminer une densité de probabilité de U.

③ Déterminer une densité de probabilité de V.

Exercice 12 [Agro 2018] : ✶✶

On rappelle que si X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densité f_X et f_Y alors $X+Y$ est une variable à densité et la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\text{Pour tout réel} t,\ h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u) f_Y(t-u)du$$

est une densité de $X+Y$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes : U et V suivant, chacune, la loi uniforme sur $[0;1]$.

① Justifier son existence, puis déterminer une densité f de la variable aléatoire U^2, ainsi qu'une densité de V^2.

② On considère la variable aléatoire $Z = U^2 + V^2$. Justifier que Z admet une densité de probabilité, notée h.

③ Écrire un programme permettant de simuler la variable aléatoire Z et d'estimer $P(Z \leq 1)$.

④ **a.** Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}\frac{1}{\sqrt{t}}dt$.

b. Montrer que, pour $0 < x \leq 1$, on a : $h(x) = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-y}}\frac{1}{\sqrt{y}}dy$.

c. Montrer que, sur $]0;1]$, on a : $h(x) = \dfrac{\pi}{4}$.
(On pourra utiliser le changement de variable $y = sin^2(u)$).

d. Interpréter graphiquement le résultat en terme d'aire.

Exercice 13 : ✶✶

① Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ y & 2x \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et le système

$$(S_\lambda) : (A - \lambda I_2) \cdot X = 0 \text{ où } X = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Donner une condition sur x et y afin qu'il existe deux valeurs réelles distinctes de λ pour lesquelles le système $A \cdot X = \lambda X$ admette au moins une solution non nulle.
Remarque : On ne cherchera pas à résoudre ces deux systèmes.

② Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0,1]$.
On note F_X et F_Y les fonctions de répartition respectives des variables aléatoires X et Y.

a. Écrire une fonction informatique qui calcule une valeur approchée de $\mathbb{P}(X^2 - Y > 0)$.

b. Montrer que les variables aléatoires X^2 et $-Y$ admettent une densité. Déterminer une densité de chacune de ces variables.

c. En déduire que la variable aléatoire $X^2 - Y$ admet pour densité la fonction h définie par :

$$f : z \longmapsto \begin{cases} \sqrt{z+1} & \text{si } -1 \leq z \leq 0 \\ 1 - \sqrt{z} & \text{si } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

③ Quelle est la probabilité que la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Y & 2X \end{pmatrix}$ soit telle qu'il existe deux valeurs réelles distinctes de λ pour lesquelles le système $M \cdot X = \lambda X$ admette au moins une solution non nulle ?