Exercice 1 Soit $f : x \mapsto kx(1-x)\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$

1. f est une densité de probabilité si :

(i) f positive sur $\mathbb{R}$ donc $k>0$

(ii) f continue sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points.

or f est continue sur $[0,1]$, sur $\mathbb{R}\setminus[0,1]$ et
$\lim_{x\to 0^-} f(x) = 0 = f(0)$ et $f(1) = 0 = \lim_{x\to 1} f(x)$

Donc pour tout $k \in \mathbb{R}_+^*$, f est continue sur $\mathbb{R}$.

(iii) Par application de la relation de Chasles :

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_0^1 f(t)dt = k\int_0^1 t(1-t)dt$ qui est une intégrale définie car f continue sur $[0,1]$

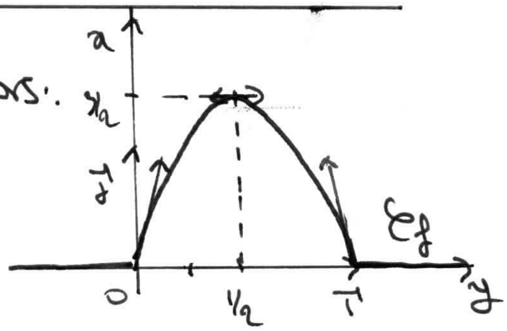
Donc

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt$ converge et vaut : $k\left[t^2/2 - t^3/3\right]_0^1 = \frac{k}{6}$

conclusion $\boxed{f \text{ est une densité de probabilité si } k=6}$

2. Soit X var de densité f. Alors :

$\forall x\in\mathbb{R},\ F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$



On peut noter que $X(\Omega) = [0,1]$
donc immédiatement :

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}$

si $0\leq x\leq 1$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x 6t(1-t)dt$ d'après la relation de Chasles.

Soit $F_X(x) = 6\left[x^2/2 - x^3/3\right]$

conclusion $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ 3x^2-2x^3 & \text{si } 0\leq x\leq 1 \\ 1 & \text{si } x>1 \end{cases}}$

{ on vérifie que F_X est continue, de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

3) $\int_{-\infty}^{\infty} |tf(t)|dt = \int_0^1 6t^2(1-t)dt$: intégrale définie donc $E(X)$ existe et vaut $\left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = 1/2$

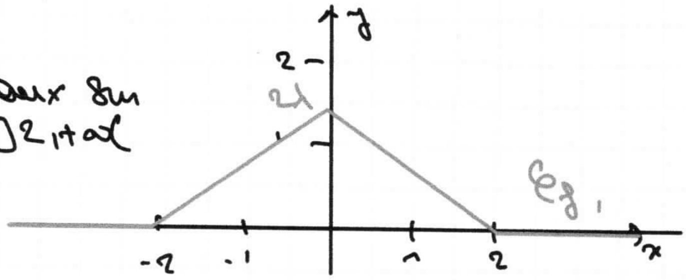
$\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt = \int_0^1 6t^3(1-t)dt = \left[\frac{3}{2}t^4 - \frac{6}{5}t^5\right]_0^1 = 3/10$ Donc $E(X^2)$ existe et vaut $\frac{3}{10}$

Concl : $\boxed{V(X) \text{ existe et vaut } E(X^2) - E^2(X) = 3/10 - 1/4 = 1/20}$ (K.H.)

Exercice 2

a) $f(x) = \begin{cases} \lambda(2-|x|) \text{ si } -2 \le x \le 2 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases} = \begin{cases} \lambda(2+x) \text{ si } -2 \le x < 0 \\ \lambda(2-x) \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

① Une représentation graphique est la suivante.



- f est positive sur $\mathbb{R}$
- f est continue par morceaux sur $]-\infty,-2[,]-2,0[,]0,2[$ et $]2,+\infty[$

et $\lim_{-2^-} f = 0 = \lim_{-2^+} f$

$\lim_{0^-} f = 2\lambda = \lim_{0^+} f$

et $\lim_{2^-} f = 0 = \lim_{2^+} f$; donc f est continue sur $\mathbb{R}$

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_{-2}^{2} f(t)\,dt$ (d'après la rel. de Chasles)

$= 2\int_0^2 \lambda(2-t)\,dt$ (car f est paire)

$= 2\lambda\left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^2 = 2\lambda\left(4-\frac{4}{2}\right) = 4\lambda = 1 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{4}$

conclusion $\boxed{f \text{ est une densité si } \lambda = \frac{1}{4} \quad f(x) = \frac{1}{4}(2-|x|)\,\mathbb{1}_{[-2,2]}(x)}$

② Fonction de répartition : $X(\Omega) = [-2,2]$ (support de X)

donc :

$\forall x < -2$, $F_X(x) = P(X \le x) = P(\emptyset) = 0$

$\forall x > 2$, $F_X(x) = P(X \le x) = P(\Omega) = 1$

$\forall -2 \le x < 0$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \frac{1}{4}\int_{-2}^x (2+t)\,dt$ [R. de Chasles]

$= \frac{1}{4}\left[2t + \frac{t^2}{2}\right]_{-2}^x = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8}$

$\forall 0 \le x \le 2$: $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^x f(t)\,dt$

$= F_X(0) + \frac{1}{4}\int_0^x (2-t)\,dt$

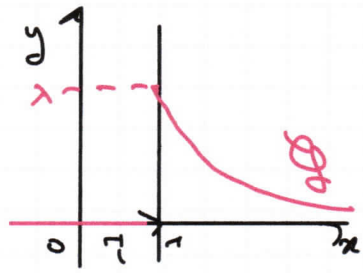
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[2t - \frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{1}{2} + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$.

conclusion $\boxed{F_X(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x < -2 \\ 1/2 + x/2 + x^2/8 \text{ si } -2 \le x \le 0 \\ 1/2 + x/2 - x^2/8 \text{ si } 0 \le x \le 2 \\ 1 \text{ si } x > 2 \end{cases}}$ (Laisser à vérifier la continuité)

③ $E(X)$ existe et vaut $\int_{-2}^{2} t f(t)\,dt = 0$ car $t \mapsto t f(t)$ impaire !

b) $f(x) = \begin{cases} \lambda / x^n & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

une représentation graphique est :



- f est positive sur $\mathbb{R}$ si $\lambda > 0$
- f est continue sur $\mathbb{R} - \{1\}$ car continue par morceaux et $\lim\limits_{1^-} f = 0 \neq \lim\limits_{1^+} f = \lambda \neq 0$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt = \int_1^{\infty} \lambda \frac{dt}{t^n}$; on pose $G(x) = \int_1^x \lambda \frac{dt}{t^n} = \lambda \left[\frac{t^{1-n}}{1-n} \right]_1^x = \lambda \frac{x^{1-n} - 1}{1-n}$

or $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1-n} = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^{n-1}}$ avec $n \geq 2$

donc $\lim\limits_{x \to \infty} x^{1-n} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to \infty} G(x) = \frac{\lambda}{n-1}$

conclusion $\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt \text{ CV et vaut } 1 \text{ si } \lambda = n-1 \to f \text{ est alors une ddp.}}$

② $X(\Omega) = [1, +\infty[$ (support de X) donc :

- $\forall x < 1$: $F_X(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$
- $\forall x \geq 1$, $F_X(x) = (n-1) \int_1^x \frac{dt}{t^n} = (n-1) \frac{x^{1-n} - 1}{1-n}$ [Rel° de Chasles)

$= 1 - x^{1-n}$

<u>conclusion</u> $\boxed{F_X(x) = \left(1 - \frac{1}{x^{n-1}}\right) \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)}$

③ $E(X)$? on étudie $\int_{-\infty}^{\infty} |t| f(t)\,dt = (n-1) \int_1^{\infty} t \frac{dt}{t^n}$ [Rel° de Chasles)

$= (n-1) \int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{n-1}}$.

<u>Si $n = 2$</u>, alors $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t}$ DV et donc $E(X)$ n'existe pas

<u>si $n > 2$</u> alors $\int_1^{\infty} \frac{dt}{t^{n-1}}$ CV et vaut $\lim\limits_{x \to \infty} \left[\frac{t^{2-n}}{2-n} \right]_1^x = \frac{1}{n-2}$

<u>conclusion</u> $\boxed{E(X) \text{ existe et vaut } \frac{n-1}{n-2}}$

Exercice 3 $\quad g(t) = \frac{b}{2^t} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(t)$ où $b \in \mathbb{R}$.

1/(i) g est positive sur $\mathbb{R}$ si $b \in \mathbb{R}_+^*$

(ii) g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ pour toute valeur de b dans $\mathbb{R}_+^*$

(iii) D'après la relation de Chasles :

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = \int_1^{\infty} \frac{b}{2^t} dt = b \int_1^{\infty} \frac{dt}{2^t}$$

$t \mapsto \frac{1}{2^t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.

Posons $G : x \mapsto \int_1^x \frac{dt}{2^t}$; on a $G(x) = \int_1^x e^{-t\ln 2} dt = \left[-\frac{1}{\ln 2} \frac{1}{2^t}\right]_1^x$

$$= \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{2^x \ln 2}$$

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} G(x) = \frac{1}{2\ln 2}$

D'où $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt$ converge et vaut $\frac{b}{2\ln 2}$

Conclusion $\boxed{g \text{ est une densité de probabilité si } b = 2\ln 2}$

② On demande la loi de $Y = X - 1$.

$X(\Omega) = [1,+\infty[$ donc $Y(\Omega) = \mathbb{R}_+$.

Dès lors :

$\forall x < 0, \quad F_Y(x) = 0$

$\forall x \geq 0, \quad F_Y(x) = P(Y \leq x) = P(X - 1 \leq x) = P(X \leq x+1)$

$= F_X(x+1)$

F_Y est donc continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $[0,+\infty[$ car $x \mapsto x+1 \in C^1(\mathbb{R})$ et F_X continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $[1,+\infty[$

Y est donc une variable aléatoire à densité.

On obtient une densité h de Y en dérivant F_Y sur $[0,+\infty[$

$$h(x) = F_Y'(x) = 1 \cdot F_X'(x+1) = g(x+1) = \frac{2\ln 2}{2^{x+1}} = \frac{\ln 2}{2^x} \quad \forall x \geq 0$$

on pose $h(0) = 0$ et on conclut :

$$\boxed{h(x) = \ln 2 \, e^{-\ln 2 \cdot x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)}$$

Conclusion : $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\ln 2)$ et $V(Y) = \frac{1}{\ln^2(2)}$ [Question de cours..]

Exercice 4

① $e^{x} - e^{-x} = e^{-x}(e^{2x} - 1)$

Donc $e^{x} - e^{-x} > 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 > 0$ [car $\forall x \in \mathbb{R},\ e^{-x} > 0$]

$\Leftrightarrow e^{2x} > 1$

$\Leftrightarrow 2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

<u>Conclusion</u> $\boxed{D = \mathbb{R}_+^*}$

② a) $\forall x \in D,\ f(x) = \ln(e^{x} - e^{-x})$; f dérivable sur D et $\forall x \in D$,

$$f'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} > 0 \quad \forall x \in D \text{ puisque } e^{x} - e^{-x} > 0\ \forall x \in D$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

$e^{x} - e^{-x} = e^{x} - \frac{1}{e^{x}} \underset{\infty}{\sim} e^{x}$ Donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$

et $\begin{cases} \lim\limits_{-\infty} e^{x} = 0 \\ \lim\limits_{-\infty} e^{-x} = +\infty \end{cases}$ Donc $\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$

b) f est continue et strictement croissante sur $D = \mathbb{R}_+^*$

Donc f est <u>une bijection</u> de $]0, +\infty[$ sur $]-\infty, +\infty[$.

or $0 \in]-\infty, +\infty[$ donc $\boxed{\exists!\ \alpha \in \mathbb{R}_+^* \mid f(\alpha) = 0}$

<u>Calculons α</u> : $\ln(e^{x} - e^{-x}) = 0 \Leftrightarrow e^{x} - e^{-x} = 1 \Leftrightarrow e^{2x} - 1 = e^{x}$

$\Leftrightarrow e^{2x} - e^{x} - 1 = 0$

on pose $X = e^{x}$; $X^2 - X - 1$ a pour discriminant $\Delta = 5$ et pour racines.

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0 \text{ et } x_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0.$$

<u>Conclusion</u> $\boxed{\text{l'unique } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \mid f(\alpha) = 0 \text{ est } \alpha = \ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$

c) (T_α) a pour équation $y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) = f'(\alpha)(x - \alpha)$

Sa pente vaut donc $f'(\alpha) = \dfrac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$ avec $e^{\alpha} - e^{-\alpha} = 1$ puisque $f(\alpha) = 0$

Donc

$$f'(\alpha) = e^{\alpha} + e^{-\alpha} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{(6 + 2\sqrt{5}) + 4}{2(1+\sqrt{5})} = \frac{5+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}$$

D'où (Expression conjuguée)

$$f'(\alpha) = \frac{(5+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{-4\sqrt{5}}{-4} = \sqrt{5}$$; $\boxed{\text{la pente de } (T_\alpha) \text{ vaut } \sqrt{5}}$

③ a) $f(x) - x = \ln[e^{x}(1 - e^{-2x})] - x = x + \ln(1 - e^{-2x}) - x$

$= \ln(1 + e^{-2x})$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - x) = \ln(1) = 0}$

③ b) D'après ③ a) on déduit que $\mathcal{C}_f$ admet pour asymptote : $\boxed{y = x}$ en $+\infty$ [c'est la définition... $\lim_{\infty}[f(x)-(ax+b)] = 0$]

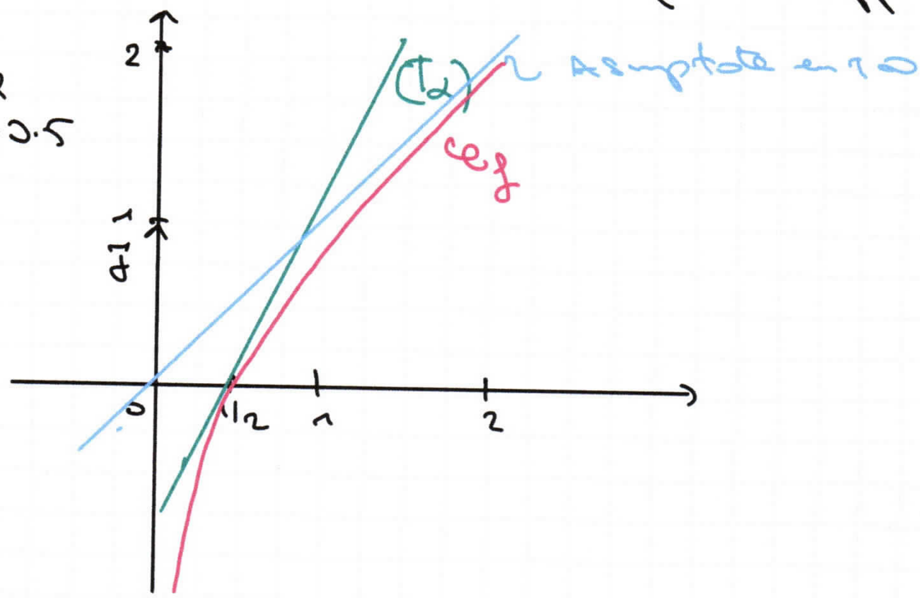
c) On a $f(x) - x = \ln(1-e^{-2x}) < 0$ puisque $1 - e^{-2x} < 1$

Conclusion $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de son asymptote.}}$

④ a) on fait la synthèse de tout ce qu'on a appris...

on insiste sur la tangente en α en admettant $\alpha \simeq 0.5$

et on trace l'asymptote.



⑤ a) On note $g_\lambda(x) = \frac{\lambda}{e^{2x}-1} \mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(x)$.

Soit $h(x) = f(x) - x$; Alors $h'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} - 1 = \frac{2e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{2}{e^{2x}-1}$

on remarque donc que h est UNE primitive de g_λ à $\frac{\lambda}{2}$ près...

→ Déterminons λ pour que g_λ soit une densité de probabilité

(i) g_λ est positive sur $\mathbb{R}$ si $\lambda > 0$ car $\forall x \geq \alpha$, $e^{2x} - 1 > 0$ (puisque α est strict^t > 0)

(ii) g_λ continue sur $]-\infty, \alpha[$ car fonction nulle.
et continue sur $]\alpha, +\infty[$ car inverse de $x \mapsto e^{2x} - 1$ qui est continue et ne s'annule pas sur $]\alpha, +\infty[$ (ne s'annule qu'en 0...)
Enfin,
$$\lim_{x \to \alpha^-} g_\lambda(x) = 0 \neq \lim_{x \to \alpha^+} g_\lambda(x) = e^{2\alpha} - 1 > 0$$
Donc g_λ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\alpha\}$

(iii) $\int_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\infty} g_\lambda(t)\,dt$ [Rel$^\circ$ de Chasles]

Posons $G_\lambda(x) = \int_\alpha^x g_\lambda(t) = \left[\frac{\lambda}{2} h(t)\right]_\alpha^x = \frac{\lambda}{2}\left[h(x) - h(\alpha)\right]$

avec $h(\alpha) = f(\alpha) - \alpha = -\alpha$ et $h(x) = f(x) - x \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ [cf Asymptote]

D'où $\lim_{x \to \infty} G_\lambda(x) = \frac{\lambda\alpha}{2}$

On a donc obtenu que $\int_{-\infty}^{\infty} g_\lambda(t)\,dt$ CV et vaut $\frac{\lambda\alpha}{2}$

<u>Conclusion</u> $\boxed{g_\lambda \text{ est une densité si et seulement si } \lambda = \frac{2}{\alpha}}$

b) Soit G_λ la fonction de répartition de X.

$X(\Omega) = [\alpha, +\infty[$ (support de X)

Donc :

<u>$\forall x < \alpha$,</u> $G_\lambda(x) = P(X \leq x) = P(\emptyset) = 0$

<u>$\forall x \geq \alpha$</u> $G_\lambda(x) = \int_{-\infty}^{x} g_\lambda(t)\,dt = \int_{\alpha}^{x} g_\lambda(t)$ [Relation de Chasles]

$= \frac{2}{\alpha}\frac{1}{2}\left(h(x) - h(\alpha)\right)$ [D'après (5) a)]

$= \frac{1}{\alpha}\left(h(x) + \alpha\right)$ (on ne peut pas simplifier davantage)

<u>Conclusion</u> $G_\lambda(x) = \frac{1}{\alpha}\left(h(x) + \alpha\right)\mathbb{1}_{[\alpha, +\infty[}(x)$

<u>Remarque</u> : on note que $G_\lambda(\alpha) = \frac{1}{\alpha}[h(\alpha) + \alpha]$

$= \frac{1}{\alpha}[f(\alpha) - \alpha + \alpha] = \frac{f(\alpha)}{\alpha}$

$= 0$ puisque $f(\alpha) = 0$

G_λ est continue sur $\mathbb{R}$ (cont. en α et cont. par morceaux).