10 Intégrales généralisées.

PRÉAMBULE : Rappel sur les fonctions définies par une intégrale

Exercice A : fonctions définies par une intégrale (suite)

On considère les fonctions f et g définies sur $[0,+\infty[$ par :

$$\forall x \in [0,+\infty[,\ f(x) = \ln(1+e^x) \text{ et } g(x) = \int_0^x f(t)dt$$

① Construire le tableau de variation de g sur $[0,+\infty[$.

② Déterminer la branche infinie de g en $+\infty$ et donner l'allure de la courbe représentant g sur $[0,+\infty[$.

Exercice B :

Pour tout réel x strictement positif, on pose

$$g(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t}dt \text{ et } \forall x \neq 0,\ f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}dt.$$

① Étudier la parité de f.

② Montrer que g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Donner une expression de sa dérivée.

③ Donner une relation simple entre f et g. En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer $f'(x)$.

④ A l'aide d'une intégration par parties, montrer que f admet une limite en $+\infty$.

⑤ Appliquer le théorème des accroissements finis pour obtenir un majoration de $|\cos t - 1|$.
En déduire la limite en 0 de h définie par $h(x) = \displaystyle\int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
Conclure sur le prolongement par continuité de f en 0.

Exercice 1 ✶ :

Dire dans chacun des cas suivants si l'intégrale est impropre. Si oui, étudier sa convergence

$$a) I = \int_0^1 x^2 \ln x dx; \quad b) I = \int_{-1}^1 \frac{x}{1+x^2}dx; \quad c) \int_{-1}^1 \frac{x}{2x+1}dx; \quad d) I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}$$

$$e) I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^3+\sqrt{x}}; \quad f) I = \int_1^{+\infty} e^{-t^2}dt; \quad g) I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt; \quad h) I = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos t}{t^2}e^{-t}dt$$

Exercice 2 ✶✶ :

Nature et convergence des intégrales suivantes :

a) $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{x}}dx$ poser : $t = \sqrt{x}$;

b) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\ln(\tan x)}{\cos^2 x}dx$ poser : $u = \tan x$;

c) $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)\sqrt{1-x^4}}dx$ poser : $u = \arctan x$

Exercice 3 ✶ :

On définit une fonction g sur $\mathbb{R}$ en posant : $g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1 \\ \dfrac{b}{2^t} & \text{si } t \geq 1 \end{cases}$

Déterminer la constante $b \in \mathbb{R}$ pour que g soit positive sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1$

Exercice 4 ✶ :

On souhaite étudier la nature de $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{e^t - t + 1}$.

① Montrer que f est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$

② Donner un équivalent de $t \longmapsto \dfrac{t}{e^t - t + 1}$ en $+\infty$

③ Conclure sur la convergence de I.

Exercice 5 ✶✶ :

Montrer à l'aide de la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^2} dt$ que $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ converge.

Justifier que $\forall t \in [1, +\infty[,\ 0 \leq \dfrac{\cos^2 t}{t} \leq \dfrac{|\cos t|}{t}$

En déduire que $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} |\frac{\cos t}{t}| dt$ diverge.