

- Programme de colle quinzaine 8, semaine 15 -
Questions de cours :

Q1 : Soit $b > 0$. Nature et valeur éventuelle de $\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ selon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Q2 : Soit $a > 0$. Nature et valeur éventuelle de $\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ selon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Q3 : Si f et g sont deux fonctions continues et strictement positives sur $I = [a, +\infty[$ telles que $f(x) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en $+\infty$: $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature. Preuve.

Q4 : La convergence absolue entraîne la convergence. Preuve.

Q5 : Si f est une fonction paire, continue sur $] -a, a[$ telle que $J = \int_0^a f(t)dt$ converge, alors $\int_{-a}^a f(t)dt$ converge et vaut $2J$ et si f est impaire, continue sur $] -a, a[$ telle que J converge, alors $\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

Application : Soit $f : t \mapsto \frac{1}{\pi(t^2 + 1)}$. Nature et valeur de $I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et de $I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

Q6 : Intégration par parties (énoncé d'abord dans le cas des intégrales définies). Modifier cet énoncé dans le cas des intégrales généralisées.

Q7 : Énoncer le théorème de changement variables dans le cas des intégrales généralisées.

Application à $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t} + \sqrt{t^3}}$

EXERCICE 1 : Programme d'intégration de BCPST1.

- Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.
- Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a . Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
- *Compléments :* Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n})$.
- Intégrations par parties. Changements de variables (✍ « **Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'une intégration par parties ou d'un changement de variable sera indiquée** »).

EXERCICE 2 : Intégrales généralisées.
Bonnes colles !