- Programme de colle quinzaine 7, semaine 14 -

Questions de cours :

Q1 : Soit $b > 0$. Nature et valeur éventuelle de $\displaystyle\int_0^b \frac{dt}{t^\alpha}$ selon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$.

Q2 : Soit $a > 0$. Nature et valeur éventuelle de $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ selon $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$

Q3 : Si f et g sont deux fonctions continues et strictement positives sur $I = [a, +\infty[$ telles que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g(x)$, alors les intégrales généralisées en $+\infty$: $\displaystyle\int_a^\infty f$ et $\displaystyle\int_a^\infty g$ sont de même nature. Preuve.

Q4 : La convergence absolue entraîne la convergence. Preuve.

Q5 : Si f est une fonction paire, continue sur $]-a, a[$ telle que $J = \displaystyle\int_0^a f(t)dt$ converge, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt$ converge et vaut $2J$ et si f est impaire, continue sur $]-a, a[$ telle que J converge, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f(t)dt = 0$

Application : Soit $f : t \longmapsto \dfrac{1}{\pi(t^2+1)}$. Nature et valeur de $I_1 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt$ et de $I_2 = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$

Q6 : Intégration par parties (énoncé d'abord dans le cas des intégrales définies).
Modifier cet énoncé dans le cas des intégrales généralisées.

Q7 : Énoncer le théorème de changement variables dans le cas des intégrales généralisées.
Application à $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}+\sqrt{t^3}}dt$

EXERCICE 1 : Programme d'intégration de BCPST1.

- Propriétés de l'intégrale : Linéarité, relation de Chasles, positivité, encadrement de l'intégrale à partir d'un encadrement de la fonction. Pour $a < b$, majoration $|\displaystyle\int_a^b f(t)dt| \leq \int_a^b |f(t)|dt$.
- Si f est continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en a. Valeur moyenne d'une fonction continue sur un segment.
- *Compléments :* Sommes de Riemann sur $[0, 1]$: $\displaystyle\int_0^1 f(t)dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.
- Intégrations par parties. Changements de variables (✐ « **Au cours d'une épreuve, sauf dans les cas simples, la nécessité d'un intégration par parties ou d'un changement de variable sera indiquée** »).

EXERCICE 2 : Intégrales généralisées.

Bonnes colles !