CORRECTION
Applications linéaires et variables aléatoires à densités

Exercice 1 : Algèbre linéaire (oral Agro véto 2017)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on on considère l'endomorphisme f_a de E associé défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \text{ et } f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

① Écrire en Python une fonction `f_a(x,y,z,a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_a(u)$ pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ exprimé lui aussi dans la base $\mathcal{B}$.
Il suffit de noter que :

$$f_a(x,y,z) = f_a(xe_1 + ye_2 + ze_3) = xf_a(e_1) + yf_a(e_2) + zf_a(e_3) = (x+z)(ae_1 + e_2 - ae_3)$$

Dès lors, une fonction possible est :

```python
def fa(x,y,z,a):
    return (x+z)*np.array([a,1,-a])
```

② a) *Pour déterminer une base de $Im(f_a)$, on écrit :*

$$\mathrm{Im}(f_a) = \mathrm{Vect}\{f_a(e_1), f_a(e_2), f_a(e_3)\} = \boxed{\mathrm{Vect}\{(a, 1, -a)\}}$$

b) *Montrons que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $Ker(f_a)$:* On commence par appliquer la formule du rang

$$\dim(\mathrm{Ker} f_a) = 3 - \mathrm{rg}(f_a) = 3 - 1 = 2$$

avec :

$$f_a(e_2) = 0 \Leftrightarrow e_2 \in \mathrm{Ker}(f_a) \text{ et } f_a(e_1) = f_a(e_3) \Leftrightarrow f_a(e_1 - e_3) = 0 \Leftrightarrow e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f_a).$$

On en déduit que $\{e_2, e_1 - e_3\}$ est une famille libre de 2 vecteurs de $\mathrm{Ker}(f_a)$ qui est de dimension 2.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (e_2, e_1 - e_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(f_a)}$

③ *Écrivons la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculons A^2 :*
Il est immédiat que $A = \begin{pmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 1 \\ -a & 0 & -a \end{pmatrix}$ et donc $A^2 = 0$.
D'où on déduit que $\boxed{f_a \circ f_a = 0}$.

④ On pose $e_1' = f_a(e_1)$, $e_2' = e_1 - e_3$ et $e_3' = e_3$.

a) *Montrons que (e_1', e_2', e_3') est une base de E :*
On commence par noter que $\mathrm{Card}(e_1', e_2', e_3') = 3 = \dim(E)$. Il suffit donc de montrer que cette famille est libre pour montrer que c'est une base de E. Or

$$\mathrm{rg}((e_1', e_2', e_3') = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ -a & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \leftarrow L_2 \\ L_2 \leftarrow L_1 \end{matrix}$$

b) *Déterminons la matrice A' de f_a dans cette base :* On a

$$f_a(e_1') = f_a^2(e_1) = 0\,;\; f_a(e_2') = 0 \text{ car } e_1 - e_3 \in \mathrm{Ker}(f_a)\,;\; f_a(e_3') = f_a(e_3) = f_a(e_1) = e_1'$$

Conclusion : $\boxed{A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

c) *La matrice A est-elle inversible ?* On a $\mathrm{rg}(A') = 1 < 3$ donc A' est non inversible.
Or A et A' sont semblables car elles représentent la même application linéaire f_a dans deux bases distinctes.
Conclusion : $\boxed{A' \text{ non inversible implique } A \text{ non inversible}}$

⑤ Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a) *Justifions que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul :* On écrit

$$B(x) = A - xI_3 = PA'P^{-1} - xPI_3P^{-1} = P(A' - xI_3)P^{-1}$$

Cela établit que $B(x)$ et $A' - xI_3 = \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$ sont semblables.

Or $A' - xI_3$ est inversible pour tout $x \neq 0$. ***Conclusion*** : $\boxed{B(x) \text{ est inversible } \forall x \neq 0}$

b) $(A - xI_3)(A + xI_3) = A^2 - x^2I_3 = -x^2I_3$ car $A \cdot I_3 = A = I_3 \cdot A$.
Soit $B(x)\dfrac{-1}{x^2}(A + xI_3) = I_3$.
Conclusion : $\boxed{B(x) \text{ est inversible et } (B(x))^{-1} = \dfrac{-1}{x^2}(A + xI_3)}$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, en notant que $A \cdot I_3 = A = I_3 \cdot A$, on a :

$$(B(x))^n = (A - xI_3)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k (-x)^{n-k} I_3^{n-k} = \boxed{(-x)^n I_3 + n(-x)^{n-1} A}$$

Problème 1 : Agro A 1995

① Démonstration par récurrence : Soit $(\mathrm{P_n})$: ´$[J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}$˘

(i) $(\mathrm{P_1})$ est vraie car $J(a,b) = \begin{pmatrix} a^l & 1 \cdot a^0 & 0 \\ 0 & a^l & 0 \\ 0 & 0 & b^l \end{pmatrix}$;
(ii) *Hypothèse* : On suppose $(\mathrm{P_n})$ vraie pour n fixé ($n \geq 1$).
(iii) *Hérédité* :

$$[J(a,b)]^{n+1} = [J(a,b)]^n \cdot J(a,b) = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{n+1} & (n+1)a^n & 0 \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & b^{n+1} \end{pmatrix}$$

Ce qui prouve que $(\mathrm{P_{n+1}})$ est vraie.

(iv) **Conclusion** : $[J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix} \forall n \geq 1$

✐ **Remarque** : il est possible d'obtenir ce résultat en appliquant la formule du binôme de Newton.

On pose $J(a,b) = A + B$ où $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $A \cdot B = B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Alors : $[J(a,b)]^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^k B^k A^{n-k} = A^n + nA^{n-1}B$ puisque $B^k = 0, \forall k \geq 2$

Or $A^k = \text{diag}\left[a^k, a^k, b^k\right], \forall k \in \mathbb{N}$ car c'est une matrice diagonale d'où la conclusion.

Lu dans le rapport de jury : *« Le raisonnement par récurrence est dans l'ensemble bien traité mais n'était pas demandé. Quelques candidats ont décomposé la matrice $J(a,b)$ en somme d'une matrice diagonale et d'une matrice nilpotente, puis appliqué la formule du binôme de Newton. Ceci nous montre la présence de personnes ayant bien assimilé certaines techniques du programme. »*

② a) On a $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3id = O$ si et seulement si $M^3 + M^2 - 5M + 3I = 0$ où I désigne la matrice de l'identité. Ce qui est le cas !

b) On note P le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$.
l est racine évidente de $P(X)$ et de $P'(X) = 3X^2 + 2X - 5$ mais pas de $P''(X) = 6X + 2$.
Donc 1 est racine double de P. En conséquence :

$$\exists Q \in l \quad [X]/P(X) = (X-1)^2 Q(X)$$

On obtient immédiatement par identification : $\boxed{P(X) = (X-1)^2(X+3)}$

c) *Démonstration par récurrence.* Soit $\mathrm{R_k}$ « $\Phi^k(u) = \lambda^k \cdot u$ »
i. $\mathrm{R_1}$ est vraie par hypothèse.
ii. Hypothèse de récurrence : On suppose $\mathrm{R_k}$ vraie pour k fixé ($k \geq 1$)
iii. Alors $\Phi^{k+l}(u) = \Phi \circ \Phi^k(u) = \Phi\left(\lambda^k \cdot u\right) = \lambda^k \cdot \Phi(u)$ car Φ est linéaire. $= \lambda^k \cdot \lambda u = \lambda^{k+l} u$; Ce qui prouve $\mathrm{R_{k+1}}$ vraie.
iv. ***Conclusion*** : $\boxed{\Phi^k(u) = \lambda^k \cdot u, \forall k \geq 1}$

Lu dans le rapport de jury : *« Cette question fait apparaître de grosse erreurs.*
Calcul de $\Phi^3(x) = [\Phi(u)]^3$ par exemple.
Trop de candidats ne font pas le lien entre 2.c) et 4.c) et recherchent les valeurs de λ pour lesquelles $M - \lambda I$ est non inversible par une méthode du pivot. Il y a perte de temps. »

Nous rappelons maintenant que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3Id = O$.
Donc $\Phi^3(u) + \Phi^2(u) - 5\Phi(u) + 3Id(u) = O(u) = 0$ pour tout $u \in l^3$ et en particulier pour u non nul tel que $\Phi(u) = \lambda \cdot u$. En utilisant le début de cette question, on a donc :

$$\lambda^3 u + \lambda^2 u - 5\lambda u + 3u = 0 = \left(\lambda^3 + \lambda^2 - 5\lambda + 3\right) \cdot u$$

ou encore :

$$P(\lambda) \cdot u = 0$$

Or u est supposé non nul donc $P(\lambda) = 0$ ***Conclusion*** : $\boxed{(\exists u \neq 0 / \Phi(u) = \lambda u) \Rightarrow P(\lambda) = 0}$

③ a)

$$\text{Soit } M_{-3} = M + 3I = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi + 3Id)$$

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(\Phi + 3Id) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y - 3z = 0 \\ x = -3y \\ y = -3z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0z = 0 \\ x = 9z \\ y = -3z \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}(\Phi + 3Id) = \left\{ (x,y,z) \in|^3 / x = 9z \text{ et } y = -3z \right\}}$ ou encore :

$$\operatorname{Ker}(\Phi + 3Id) = \{(9z, -3z, z), z \in|\} = \operatorname{Vect}\{(9, -3, 1)\}$$

$u = (9, -3, l)$ étant non nul, (u) une libre et génératrice de $\operatorname{Ker}\varphi$.$(u)$ est une base de $\operatorname{Ker}\varphi$

$$u \in \operatorname{Ker}(\Phi + 3id) \Leftrightarrow \Phi(u) + 3u = 0 \Leftrightarrow \Phi(u) = -3u$$

b)

$$\text{Soit } M_l = M - I = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ l & -l & 0 \\ 0 & l & -l \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi - I)$$

$$(x,y,z) \in \operatorname{Ker}(\Phi - Id) \Leftrightarrow M_l \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + 5y - 3z = 0 \\ x - y \;\; = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{\operatorname{Ker}(\Phi - Id) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / x = y et y = z\}}$

$\operatorname{Ker}(\Phi - Id) = \{(x,x,x), x \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}$; On pose $v = (1,1,1)$ $v \neq 0$ donc (v) libre et génératrice de $\operatorname{Ker}(\Phi - Id)$.(
v) est une base de $\operatorname{Ker}(\Phi - Id)$

$$v \in \operatorname{Ker}(\Phi - id) \Leftrightarrow \Phi(v) - v = 0 \Leftrightarrow \Phi(v) = v$$

Lu dans le rapport de jury : *« Souvent les candidats ne répondent pas aux questions ou alors ils le font de façon incomplète (le caractère libre de la famille n'est pas signalé). On donne aussi parfois des bases sans respecter la contrainte de l'énoncé qui demande une troisième coordonnée égale à 1 . »*

c) D'après la question 2.c) et par contraposition de l'implication obtenue on peut dire que :

$$P(\lambda) \neq 0 \Rightarrow \forall u \neq 0, \Phi(u) \neq \lambda u$$

Autrement dit : Si $\lambda \notin \{-3, l\}$ alors $\forall u \neq 0, \Phi(u) - \lambda u \neq 0$ ou encore $(\Phi - \lambda Id)(u) \neq 0$
Conclusion : $\overline{\text{Si}\lambda \notin \{-3, 1\} \text{ alors }}$ $\operatorname{Ker}(\Phi - \lambda Id) = \{0\}$

④ a) On cherche $x \in \mathbb{R}^3$ de la forme $x = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifiant : $\gamma = 1$ et $\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i$ (**)

(**) $\Leftrightarrow \Phi(x) - x = (1,1,1)_\varepsilon \Leftrightarrow (\Phi - id)(x) = (1,1,1)_\varepsilon \Leftrightarrow \psi(x) = (1,1,1)_\varepsilon$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 5\beta - 3 = 0 \\ \alpha = \beta + 1 \\ \beta = 1 + 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \, (L_3) \\ \alpha = 3 \, (L_2) \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{x = (3,2,1)_\varepsilon}$

b) Soit $E = \ker\left[(\Phi - id)^2\right] = \ker\left(\psi^2\right)$.

$$(x,y,z) \in E \Leftrightarrow (\Phi - Id)^2(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow M_1^2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -18 & 9 \\ -3 & 6 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x - 2y + z = 0$$

Conclusion : $\text{Ker}(\Phi - Id)^2 = \left\{(2y - z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\right\} = \text{Vect}\{v, x\}$

Où $v = (1,1,1)_\varepsilon \in E$ et $x = (3,2,1)_\varepsilon \in E$

c) Montrons que $\Phi(E) \subset E$, c'est-à-dire montrons que pour tout vecteur s de E son image $\Phi(s)$ est aussi un vecteur de E.
$x \in E \Rightarrow \exists\,(\lambda_l, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 / s = \lambda_l v + \lambda_2 x \Rightarrow \Phi(s) = \lambda_l \Phi(v) + \lambda_2 \Phi(x)$ car Φ est linéaire.
Or $\Phi(v) = v$ et $\Phi(x) = x + (1,1,1) = v + x$.
On en déduit que $\Phi(s) = \lambda_I v + \lambda_2(v + x) = (\lambda_I + \lambda_2)\,v + \lambda_2 x \in E$ puisque $\Phi(s)$ s'exprime dans une base de E.
Conclusion : $\boxed{\Phi(E) \subset E}$

Lu dans le rapport de jury : « *$\Phi(E) \subset E$ est rarement bien traité mais on voit de bonnes démonstrations, d'autres ne voient pas le problème et s'imaginent que c'est toujours vrai.* »

La réunion d'une base de E, connue depuis la question 4.b) et d'une base de $\text{Ker}(\Phi + 3Id)$ obtenue en 5.a. forme une base de $\mathbb{R}^3$. Il suffit de calculer le rang de la famille $\{u, v, x\}$ pour s'en convaincre.

Lu dans le rapport de jury : « *question bien traitée avec la réunion des bases.* »

⑤ a) Notons $\mathscr{B}_l = (v, x)$ et $\mathscr{B}_2 = ((9,-3,1)) = (u)$ alors, puisque $\mathscr{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ est une nouvelle base de $\mathbb{R}^3$, $\varepsilon' = (v, x, u)$ est la base cherchée. On a obtenu précédemment que $\Phi(v) = v, \Phi(x) = v + x$ et $\Phi(u) = -3u$ [puisque, rappelons le encore une fois, $u \in \ker(\Phi + 3id)$ et donc $(\Phi + 3id)(u) = 0 = \Phi(u) + 3u \ldots$]

Conclusion :

$$M' = M_{B'}(\Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} = J(1, -3)$$

b) D'après le cours :

Si P désigne la matrice de passage de ε vers ε' alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Par application des formules de changement de base, on obtient : $M = P{\cdot}M'{\cdot}P^{-I}$ et par récurrence, on montre que : $\forall n \in \odot, M^n = P \cdot M'^n \cdot P^{-1}$ avec, d'après 1 .

$$M'^n = [J(1,-3)]^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-3)^n \end{pmatrix}, \forall n \in \odot.$$

Posons C_l la première colonne de M^n. On a par définition du produit : $C_l = M^n \cdot \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

D'où

$C_l = PM'^n P^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} PM'^n \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ puisque, après calculs $P^{-1} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} -5 & -6 & 27 \\ 4 & 8 & -12 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

Soit

$$C_l = \frac{1}{16} P \begin{pmatrix} -5+4n \\ 4 \\ (-3)^n \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4n+7+9(-3)^n \\ 4n+3+(-3)^{n+1} \\ 4n-1+(-3)^n \end{pmatrix} \forall n \in \mathbb{N}^*$$

✐ : *Remarque :* En 2.c) on a calculé M^2 et M^3. Pensez à vérifier vos résultats.

Lu dans le rapport de jury : « *Le changement de base est compris mais il manquait souvent des données pour conclure. Ici aussi il y a parfois un manque de réflexion, certains refont le calcul par récurrence de $J(1,-3)^n$ et ne pensent pas à utiliser I/1* »

⑥ a) Fonction Python...

b) n étant un entier naturel fixé, on pose $U_n = (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n)$. Alors : $U_{n-l} = (u_{n+2}, u_n, u_{n-1})_\varepsilon$ et $\Phi(U_{n-1}) = (-u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}, u_{n+1}, u_n)_\varepsilon = (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n)_\varepsilon$.
Conclusion : $\boxed{\Phi(U_{n-1}) = U_n, \forall n \geq 1}$

c) Nous avons $w_0 = id(w_0) = \Phi^0(w_0)$ et, d'après la question précédente, $w_l = \Phi(w_0)$, ce qui initialise la récurrence.
On suppose que $w_n = \Phi^n(w_0)$ pour n fixé ($n \geq l$)
Alors, d'après 3.a) $w_{n+1} = \Phi(w_n) = \Phi[\Phi^n(w_0)] = \Phi^{n+1}(w_0)$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \Phi^n(w_0)}$

d) On pose $X_n = \mathcal{M}_\varepsilon(U_n) = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}, \forall n \in \mathbb{N}$.
Dans la base ε la relation obtenue en 3.b) devient : $X_n = M^n \cdot X_0$ car $M = M_\varepsilon(\Phi)$
D'où, $X_n = M^n \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si on considère $u_2 = l, u_l = 0$ et $u_0 = 0$.
Autrement dit, X_n n'est autre que la première colonne de M^n, appelée C_l à la question 5.b).
En reprenant ces résultats, on peut écrire : $\begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+l} \\ u_n \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4n+7+9(-3)^n \\ 4n+3+(-3)^{n+1} \\ 4n-1+(-3)^n \end{pmatrix}$ ***Conclusion*** : $\boxed{u_n = \frac{1}{16}(4n-1+(-3)^n), \forall n \in \odot}$

Problème 2 : Agro A 2010

Lu dans le rapport de jury : « *Commençons par une première remarque sur la rédaction des copies. Dans l'ensemble les copies sont présentées de manière aérée et sont agréables à lire. Les résultats sont souvent mis en valeur ce qui facilite l'évaluation et ne peut que prédisposer le correcteur en faveur du candidat. Mais la rédaction est souvent longue et/ou imprécise.*
Les arguments justes, quand ils sont présents, sont souvent perdus au milieu de phrases inutiles, voire fausses mathématiquement, ce qui peut entraîner une perte de points.
Les réponses se limites aussi parfois à des calculs, l'imprécision des notationns amène à nous demander si le candidat ne travaille par « par habitude » sans réellement comprendre ce qu'il fait.
Les meilleures copies sont loin d'être les plus longues. Le jury tient à rappeler que la plupart des questions du sujet pouvaient être résolues en peu de lignes et encourage vivement les candidats à travailler dans ce sens.
Un début de problème très classique. Des candidats qui montrent des compétences certaines en algèbre mais qui sont dans les 60% qui n'ont pas obtenues les bonnes valeurs de λ, ne font pas grand chose.
Encore une fois, sur un exercice classique comme celui-ci, le jury attend une rédaction qui donne du sens au calcul et pas seulement des lignes de calcul.
La question 3. au caractère théo rique marqué, est finalement abordée par une bonne proportion de candidats. Cette partie a confirmé ce que la rédaction souvent douteuse des question 1. et 2. laissait envisager, un manque de compréhension des objets manipulé. La question 4. présentait l'inconvénient d'être après la 3. (mais il est difficile de faire autrement) et donc très peu de candidats s'y aventurent, pour en général ne pas faire grand chose. »

On rappelle que $A = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ et que $M_\lambda = A - \lambda I = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -6\lambda & 3 & 3 \\ -4 & 6-6\lambda & 4 \\ -2 & 3 & 5-6\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(S_λ) désigne le système homogène associé, à savoir : $M_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

① **Recherche de sous-espaces vectoriels supplémentaires**.

a) *Montrons qu'il existe trois valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) n'est pas un système de Cramer* : (S_λ) n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée M_λ n'est pas inversible ou encore si et seulement si $\mathrm{rg}(M_\lambda) < 3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(M_\lambda) = \mathrm{rg}(A - \lambda I_3) &= \mathrm{rg}\left(6(A - \lambda I_3)\right) \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4 & 6-6\lambda & 4 \\ -2 & 3 & 5-6\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix} \\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4+12\lambda-12\lambda^2 & 0 & -2+6\lambda \\ -2+6\lambda & 0 & 2-6\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-(2-2\lambda)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix}
\end{aligned}$$

On distingue alors deux cas :

- Si $\lambda = 1/3$, alors

$$\mathrm{rg}\left(A - \frac{1}{3}I_3\right) = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} -2 & \boxed{3} & 3 \\ \boxed{-\frac{4}{3}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

- Si $\lambda \neq 1/3$, alors on peut choisir $-2+6\lambda$ comme pivot, ce qui donne

$$\operatorname{rg}(A-\lambda I_3) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -6\lambda & \boxed{3} & 3 \\ -4+12\lambda-12\lambda^2 & 0 & \boxed{-2+6\lambda} \\ -6+18\lambda-12\lambda^2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3+L_2 \end{matrix}$$

donc, dans le cas où $\lambda \neq 1/3$, on a

$$\begin{aligned} \operatorname{rg}(A-\lambda I_3) < 3 &\iff -6+18\lambda-12\lambda^2 = 0 \\ &\iff \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = 1/2\cdot \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(S_\lambda) \text{ admet une solution non nulle si } \lambda=\lambda_1=1 \text{ ou } \lambda=\lambda_2=\dfrac{1}{2} \text{ ou } \lambda=\lambda_3=\dfrac{1}{3}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question réussi dans 40% des copies.*
Certaines erreurs ne sont pas de simples fautes de calcul mais témoignent de problèmes profonds de méthodologie. Par les erreurs on retrouve :
- Des calculs de valeurs de λ pour la matrice $6A$, erreur déjà signalée dans les rapports précédents.
- Multiplication de lignes ou colonnes par des coefficients dépendant du paramètre λ sans se préoccuper de sa potentielle annulation.
On pourra déplorer que les candidats ne se posent pas plus de questions quand ils obtiennent 4 valeurs distinctes pour λ. »

b) *Déterminons u_1, u_2 et u_3 tels que $E_{\lambda_i} = Vect\{u_i\}$:*

Déterminons E_1 : D'après la réduite de Gauß obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$(A-I_3)X = 0 \iff \begin{cases} -6x + \boxed{3y} + 3z = 0 \\ -4x \qquad\quad + \boxed{4z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda \end{cases}$$

donc

$$\boxed{E_1 = \operatorname{Vect}\{u_1\} = \operatorname{Vect}\{(1,1,1)\}.}$$

Déterminons $E_{1/2}$: D'après la réduite de Gauß obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A-\frac{1}{2}I_3\Big)X = 0 \iff \begin{cases} -3x + \boxed{3y} + 3z = 0 \\ -x \qquad\quad + \boxed{z} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda \end{cases}$$

donc

$$\boxed{E_{1/2} = \operatorname{Vect}\{u_2\} = \operatorname{Vect}\{(1,0,1)\}}$$

Déterminons $E_{1/3}$: D'après la réduite de Gauß (pour $\lambda = 1/3$) obtenue à la question précédente, on a, pour $X = {}^t\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

$$\Big(A-\frac{1}{3}I_3\Big)X = 0 \iff \begin{cases} -2x + \boxed{3y} + 3z = 0 \\ \boxed{x} \qquad\qquad\quad = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -\lambda \quad (\lambda \in \mathbb{R}), \\ z = \lambda \end{cases}$$

donc

$$\boxed{E_{1/3} = \text{Vect}\{u_3\} = \text{Vect}\{(0,-1,1)\}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question dans l'ensemble bien traitée par les candidats qui avaient trouvé les bonnes valeurs de λ.*
On reste surpris par le nombre d'élèves qui trouvent des vecteurs de base qui sont faux, d'autant plus que l'on peut vérifier très rapidement la véracité du calcul obtenu (en effet $(A-\lambda I_3)X = 0 \Leftrightarrow AX = \lambda X$.
Il est aussi fort dommage de trouver des sous-espaces vectoriels réduit à 0_E sans indication qu'il doit y avoir une erreur. »

c) *Montrons que* : $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$:
Card$\{u_1, u_2, u_3\} = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$ donc il est suffisant de montrer que cette famille est libre pour prouver que c'est une base de $\mathbb{R}^3$. D'après les notations introduites dans l'énoncé, on a :

$$\text{rg}\{u_1,u_2,u_3\} = \text{rg}(P) = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & \boxed{1}\end{pmatrix} = \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 2 & \boxed{1} & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} L_1 \\ L_2{+}L_3 \\ L_3\end{array}$$
$$= \text{rg}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{array}{l} L_2{-}L_1 \\ L_2 \\ L_3\end{array}$$

D'où $\text{rg}\{u_1,u_2,u_3\} = \text{rg}(P) = 3$. Cette famille est libre.
Conclusion : $\boxed{\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3) \text{ est une base de } \mathbb{R}^3}$.

d) L'expression de la matrice de passage est immédiate. On obtient :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Certains candidats ont oublié de répondre à cette question bien qu'ayant réponde correctement aux précédentes, perdans bêtement des points.* »

② **Calcul des puissances successives de A.**

a) *Montrons que P est inversible et calculons P^{-1}* :
P est inversible s'obtient directement comme conséquence de la question 1.c) puisqu'on a montré que $\text{rg}(P) = 3 = \text{ordre}(P)$.
Sinon, on raisonne de la façon suivante : Soit $X = {}^t(x,y,z)$ et $X' = {}^t(x',y',z')$

$$PX = X' \Leftrightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y & = x' \\ x-z & = y' \\ x+y+z & = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x'-x \\ z = x-y' \\ x+(x'-x)+(x-y') = z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = -x'+y'+z' \\ y & = 2x'-y'-z' \\ z & = -x'+z' \end{cases}$$

Ce système admet une solution unique. C'est un système de Cramer et donc P est inversible.

Conclusion : $\boxed{P \text{ inversible et } P^{-1} = \begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question réussie par un tiers des candidats. Les bons calculs sur des matrices P erronées ont été récompensés.*
Encore une fois il n'est pas très long de vérifier que l'inverse calculé est le bon. »

b) C'est une question de cours : $D = P^{-1}AP$ et le calcul donne :

$$D = P^{-1}AP = P^{-1}\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 6 & 0 & -2 \\ 6 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}}$$

c) On montre par une récurrence immédiate que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{pmatrix}}$$

d) *Démontrons que $D^n = P^{-1}A^nP$ pour tout entier naturel n* :

— La relation est vraie pour $n = 0$ puisque $D^0 = I = P^{-1}IP$ et vraie pour $n = 1$ d'après la question 2.b)
— Supposons la vraie pour un entier $n \geq 0$.
— Alors $D^{n+1} = D^n \cdot D = P^{-1}A^nP \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^nIAP = P^{-1}A^{n+1}P$.
Ce qui prouve l'hérédité de cette relation.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = P^{-1}A^nP}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question bien réussie.*
Le jury attendait qu'une récurrence soit rédigée proprement pour donner l'intégralité des points.
Aucun résultat, autre qu'un résultat du cours, ne peut être annoncé sans une réelle preuve. »

e) *Déterminons l'expression de A^n* :
D'après ce qui précède, on obtient en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1} :
$\forall n \in \mathbb{N},\ PD^nP^{-1} = PP^{-1}A^nPP^{-1} = A^n$.
Dès lors :

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 6^n & 0 & 0 \\ 0 & 3^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}}^{=D^n} & \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=P^{-1}} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} & \underbrace{\frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} 6^n & 3^n & 0 \\ 6^n & 0 & -2^n \\ 6^n & 3^n & 2^n \end{pmatrix}}_{=PD^n} & \underbrace{\frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} -6^n + 2\times 3^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n \\ -6^n + 2^n & 6^n & 6^n - 2^n \\ -6^n + 2\times 3^n - 2^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix}}_{=PD^nP^{-1}} \end{array}$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A^n = \frac{1}{6^n}\begin{pmatrix} -6^n + 2\times 3^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n \\ -6^n + 2^n & 6^n & 6^n - 2^n \\ -6^n + 2\times 3^n - 2^n & 6^n - 3^n & 6^n - 3^n + 2^n \end{pmatrix}.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question trop rarement traitée.*
Certains candidats ne se sont pas donné la peine d'effectuer les produits matriciels. »

③ **Étude d'une suite matricielle**

Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Nous définissons la suite matricielle $(X_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B. \end{cases}$$

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Considérons les endomorphismes a et b de E définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$.

a) *Dans cette question, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$. Démontrer que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.*

Soit ℓ l'endomorphisme de E défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\ell) = L$. La relation matricielle $L = AL + B$ nous dit que $\ell = a \circ \ell + b$.

Soit $y \in \mathrm{Im}(b)$. Il existe alors $x \in E$ tel que $y = b(x)$. Comme $b = \ell - a \circ \ell$, on en déduit que $y = (\ell - a\circ\ell)(x) = (id_E - a)\big(\ell(x)\big)$, ce qui démontre que $y \in \mathrm{Im}(id_E - a)$.

En conclusion,

$$\boxed{\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a).}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question réussie dans 10% des copies.*
L'erreur la plus fréquente est d'écrire $L = AL + B$ si, et seulement si $L(I - A) = B$, au lieu de $(I - A)L = B$.
Beaucoup d'élèves concluent quand même après avoir commis cette erreur, ce qui constitue en soi une seconde faute ! »

b) On suppose à nouveau qu'il existe $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

i. Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.

— *Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$. Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n. En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.*

En soustrayant les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B$ et $L = AL + B$, on obtient $\forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} - L = A(X_n - L)$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Y_{n+1} = AY_n.}$$

La suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ est alors une suite matricielle géométrique, ce qui permet de conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathcal{P}(n) : \qquad Y_n = A^n Y_0.$$

Démontrons ce prédicat par récurrence.
Initialisation : On a $A^0Y_0 = I_3Y_0 = Y_0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons $\mathcal{P}(n+1)$. On a

$$Y_{n+1} = AY_n = A\,A^nY_0 = A^{n+1}Y_0,$$

où la deuxième égalité découle de $\mathcal{P}(n)$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
Conclusion : D'après le principe de récurrence,

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad Y_n = A^nY_0.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Le jury attendait ensuite pour la formule du terme général Y_n que la récurrence soit rédigée et non juste une analogie avec une suite géométrique. A noter que l'analogie est souvent faite sans réfléchir obtenant comme résultat $Y_n = Y_0A^n$ au lieu de $Y_n = A^nY_0$* »

ii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

En combinant les relations $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = A^nY_0$, on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \qquad X_n = A^n(X_0 - L) + L.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Les erreurs de la question précédente se sont répercutées sur celle-ci.* »

④ **Un exemple**. Dans cette question, nous admettons la réciproque de la question 3.a), soit :

$$\exists L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / L = AL + B \Leftrightarrow \operatorname{Im}(b) \subset \operatorname{Im}(id_E - a)$$

Nous choisissons par ailleurs :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) *Soient E un $\mathbb{R}$-ev de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E et $a \in \mathcal{L}(E)$ défini par $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$. Démontrer que pour qu'un vecteur v, de composantes (x, y, z) dans $\mathcal{B}$, appartienne à $\operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a)$, il faut et il suffit que $x - y - z = 0$.*

$$
\begin{aligned}
& \text{on a } v \in \operatorname{Im}(id - a) \\
\iff \quad & \exists u = (\alpha, \beta, \gamma) \in E, \quad \overrightarrow{v} = (id_E - a)(u) \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (Id_E - A) \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & -3 & -3 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 6\alpha \ \boxed{-3\beta} - 3\gamma = 6x & L_1 \\ 4\alpha \qquad\quad - 4\gamma = 6y & L_2 \\ 2\alpha - 3\beta + \gamma = 6z & L_3 \end{cases} \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 6\alpha \ \boxed{-3\beta} - 3\gamma = 6x & L_1 \\ \boxed{4\alpha} \qquad\quad - 4\gamma = 6y & L_2 \\ -4\alpha \qquad\quad + 4\gamma = -6x + 6z & L_3 - L_1 \longrightarrow L_3 \end{cases} \\
\iff \quad & \exists \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} 6\alpha \ \boxed{-3b} - 3\gamma = 6x & L_1 \\ \boxed{4a} \qquad\quad - 4\gamma = 6y & L_2 \\ \qquad\qquad 0 = -6x + 6y + 6z & L_3 + L_2 \longrightarrow L_3 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Or un système admet au moins une solution si, et seulement si, toutes ses équations sont satisfaites, donc

$$v \in \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a) \iff -6x + 6y + 6z = 0,$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{un vecteur } v, \text{ de composantes } (x, y, z) \text{ dans } \mathcal{B}, \text{ appartient} \\ \text{à } \operatorname{Im}(\operatorname{Id}_E - a) \text{ si, et seulement si, on a } x - y - z = 0.\end{array}}$$

✐ **Autre méthode :** On demande de montrer que $\operatorname{Im}(I_3 - A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y - z = 0\}$

Déterminons $\operatorname{Im}(I_3 - A)$:
On commence par noter que $\operatorname{rg}(I_3 - A) = 2$, ce qui est immédiat puisque la colonne C_1 est l'opposée de la somme des deux dernières colonnes, c'est-à-dire : $C_1 = -(C_2 + C_3)$ ou $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
Donc, puisque l'image est engendrée par l'image de la base canonique de départ :

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Im}(id_E - a) &= \operatorname{Vect}\{(id_E - a)(e_1), (id_E - a)(e_2), (id_E - a)(e_3)\} \\
&= \operatorname{Vect}\{(id_E - a)(e_1), (id_E - a)(e_2)\} = \operatorname{Vect}\{(1, 2/3, 1/3), (-1/2, 0, -1/2)\} \\
&= \operatorname{Vect}\{(3, 2, 1), (1, 0, 1)\} \text{ en prenant des vecteurs colinéaires}
\end{aligned}
$$

En conséquence :

$$
\begin{aligned}
(x, y, z) \in \operatorname{Im}(id_E - a) &\Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} 3 & 1 & x \\ 2 & 0 & y \\ 1 & 1 & z \end{pmatrix} = 2 \\
&\Leftrightarrow rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & 3y - 2x \\ 0 & 2 & 3z - x \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ 3L_2 - 2L_1 \\ 3L_3 - L_1 \end{matrix} = rg \begin{pmatrix} 1 & 2 & x \\ 0 & -2 & 3y - 2x \\ 0 & 0 & 3z + 3y - 3x \end{pmatrix} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 + L_2 \end{matrix} = 2
\end{aligned}
$$

Conclusion : $\boxed{(x,y,z) \in \mathrm{Im}(id_E - a) \Leftrightarrow x - y - z = 0}$

Lu dans le rapport de jury : « *Question peu abordée. Certains candidats qui posent correctement un système pour calculer Im(id − a) et qui appliquent correctement la méthode du pivot concluent qu'un système 3×3 est équivalent à la relation donnée dans la question. Le jury aurait apprécié d'avoir plus souvent une rédaction précise.* »

b) *Justifier l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

Soit b l'endomorphisme de E tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$. Pour justifier l'existence de la matrice L, la remarque en introduction de cette question nous assure qu'il suffit de démontrer que $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.

Comme $\big(b(e_1), b(e_2), b(e_3)\big)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}\, b$, il suffit donc de vérifier que les vecteurs $b(e_1)$, $b(e_2)$ et $b(e_3)$ appartiennent à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Or les colonnes de la matrice B sont les composantes de $b(e_1)$, $b(e_2)$ et $b(e_3)$ dans la base $\mathcal{B}$, donc il suffit de vérifier que les composantes de ces colonnes satisfont l'équation cartésienne $x - y - z = 0$ de $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$. Et il est clair que

$$3 - 1 - 2 = 0, \qquad -1 - 0 - (-1) = 0 \qquad \text{et} \qquad -2 - (-1) - (-1) = 0,$$

donc $\mathrm{Im}\, b \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.

En conclusion, il est licite d'utiliser le résultat de la question 3. a) γ] pour affirmer qu'

$$\boxed{\text{il existe } L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ telle que } L = AL + B.}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Ici il suffisait de vérifier l'inclusion Im(b) ⊂ Im(id − a), c'est-à-dire vérifier qu'un vecteur $y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3 = b(x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3)$ vérifie $y_1 - y_2 - y_3 = 0$. La question n'est presque jamais traitée. Rares même sont les candidats ayant pensé à s'intéresser à l'image de b.* »

c) *Déterminer une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = DL' + P^{-1}BP$. On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls. À partir de cette matrice L', déterminer une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.*

On a

$$\begin{array}{ccc} & \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}}^{=B} & \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}^{=P} \\ \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}B} & \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{=P^{-1}BP} \end{array}$$

Si l'on pose

$$L' = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

on a

$$(I_3 - D)L' = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}.$$

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
& L' = DL' + P^{-1}BP \\
\iff \quad & (I_3 - D)L' = P^{-1}BP \\
\iff \quad & \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3d & 3e & 3f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\iff \quad & d = g = h = 0, \quad e = 2, \quad f = -2 \quad \text{et} \quad i = \frac{3}{2}\cdot
\end{aligned}$$

On constate qu'il n'existe aucune condition sur a, b et c pour avoir $L' = DL' + P^{-1}BP$, ce qui signifie que l'on peut les choisir librement dans $\mathbb{R}$. Pour faire simple, on prend $a = b = c = 0$. Avec ce choix, on obtient

$$\boxed{L' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Multiplions la relation $L' = DL' + P^{-1}BP$ par P à gauche et par P^{-1} à droite, ce qui donne

$$PL'P^{-1} = PDL'P^{-1} + B.$$

Or $AP = PD$ d'après la formule de diagonalisation de la question 1. c), donc

$$PL'P^{-1} = APL'P^{-1} + B,$$

ce qui montre que l'on peut prendre

$$L = PL'P^{-1}.$$

Or

$$\begin{array}{ccc}
 & \overbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}^{=L'} & \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{=P^{-1}} \\
\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=P} & \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & -1 \end{pmatrix}}_{=PL'} & \underbrace{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix}}_{=PL'P^{-1}}
\end{array}$$

donc

$$\boxed{\text{on peut prendre } L = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 12 & -4 & -8 \\ 3 & 0 & -3 \\ 9 & -4 & -5 \end{pmatrix}\cdot}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Question peu difficile, les matrices ayant été conçues pour posséder beaucoup de* 0*. Probablement pressés par le temps, même les meilleures copies se sont adonnées au jeu de faire commuter des matrices qui ne commutent pas.*
Ainsi 1%*, seulement des candidats ont obtenu* L'*, personne n'a ensuite calculé* L*.* »

d) *Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Déterminons l'expression de la limite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$:*

Le résultat de la question 3. b) nous dit que $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

En passant à la limite, on obtient : $\underset{n\to\infty}{lim} X_n = \underset{n\to\infty}{lim}(A^n)(X_0 - L) + L$
On trouve alors que :

$$\boxed{\underset{n\to\infty}{lim} X_n = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}(X_0 - L) + L}$$