CORRECTION DU DS4 : Equations différentielles et Calcul matriciel

1 Modèle de Bernoulli

1.1 On suppose que a est une constante qui prend pour valeur a=$1/27$

Pour rappel, a est le taux de mortalité de cause indépendante de la variole par an, b est le taux d'individus susceptibles contractant la variole et guérissant par an et c est le taux d'individus susceptibles morts de la variole par an.

Les taux a, b et c sont ici des constantes et on prendra par la suite : $a = 1/27\ an^{-1}$, $b = 7/64\ an^{-1}$ et $c = 1/64\ an^{-1}$.

① a) *Interprétons $cS(t)$ et $ax(t)$:* $cS(t)$ dénombre les morts liés à la variole durant l'année t et $ax(t) = a(S(t)+R(t))$ dénombre les morts de cause indépendantes de la variole cette même année. Ces deux valeurs s'expriment en nombre d'individus par an.

b) On peut sans risque supposer que $\underset{t\to+\infty}{lim} S(t) = 0$ et $\underset{t\to+\infty}{lim} R(t) = 0$ puisque au fil des années le nombre d'individus de la cohorte diminue, qu'ils soient susceptibles ou remis (pas de naissances dans ce modèle).

c) *Écrivons une fonction* `Euler(a, b, c, S0, R0, t0, tf, h)` *qui renvoie à la fois une liste* `T` *égale à la subdivision régulière de l'intervalle $[t_0, t_f]$ de pas h ainsi qu'une liste* `X` *modélisant l'évolution du nombre d'individus sur la période $[t_0, t_f]$, en chaque point de la subdivision.* On commence par déterminer le nombre de pas de calculs en fonction de t_0, t_f et h en prenant $n = (t_f - t_0)/h$.
Il s'agit maintenant de constituer trois listes `T`, `S` et `R` de longueurs $n+1$ qu'on initialise avec des valeurs nulles et contenant respectivement les temps t_k de calcul et les estimations $S(t_k)$ et $R(t_k)$ du nombre de susceptibles et remis à l'instant t_k.
On initialise `T` en posant `T[0]=`t_0, `S[0]=`S_0 (a priori $S_0 = 1300$) et `R[0]=`R_0 (avec $R_0 = 0$).
h étant pris suffisamment petit, on considèrera que :
$S(t+h) = S(t) + hS'(t)$ et $R(t+h) = R(t) + hR'(t)$.
Il suffira alors de renvoyer la somme termes à termes des liste `S` et `R` puisqu'on rappelle que $x(t) = S(t)+R(t)$.

Une rédaction possible est la suivante :

```python
def euler(a, b, c, S0, R0, t0, tf, h):
    n = int((tf-t0)/h)
    T = [0]*(n+1)
    S = [0]*(n+1)
    R = [0]*(n+1)
    T[0] = t0
    S[0] = S0
    R[0] = R0
    for k in range(n):
        T[k+1] = T[k]+h
        S[k+1] = S[k]-h*(a+b+c)*S[k]
        R[k+1] = R[k]+h*(b*S[k]-a*R[k])
    X = [S[k]+R[k] for k in range(n+1)]
    return T, X
```

② On pose $\alpha = a + b + c$.

a) *Déterminons $S(t)$ en fonction de α, x_0 et t pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:* Il s'agit de résoudre l'équation différentielle $S'(t) = -\alpha S(t)$ avec $S(0) = S_0 = x_0 = 1300$.

$$\forall t \in \mathbb{R}^+,\ S'(t) = -\alpha S(t) \Leftrightarrow S' + \alpha S = 0$$

Les solutions sont donc de la forme $S(t) = Ke^{-\alpha t}$ avec $S(0) = K$

Conclusion : $\boxed{S(t) = x_0 e^{-\alpha t}}$

✐ On a $S(0) = x_0 = 1300$, S décroissante et sa limite en l'infini qui vaut 0. Tout cela est bien cohérent avec notre modèle...

b) En utilisant la ligne 2 du modèle proposé par Daniel Bernoulli, on obtient que

$$R'(t) = bx_0 e^{-\alpha t} - aR(t)$$

Donc R est solution de l'équation différentielle : $y' + ay = bx_0 e^{-\alpha t}$.
On commence par résoudre l'équation homogène qui est de la même que précédemment, soit $y_H(t) = Ke^{-at}$, $K \in \mathbb{R}$.
On cherche une solution particulière de la forme $y_p(t) = Q(t)e^{-\alpha t}$ où $Q \in \mathbb{R}[X]$.
On obtient par dérivation : $y_p'(t) = (Q'(t) - \alpha Q(t))e^{-\alpha t}$.
Dès lors :

$$y_p'(t) + ay_p(t) = (Q'(t) - \alpha Q(t) + aQ(t))e^{-\alpha t} = bx_0 e^{-\alpha t}$$

ou encore (puisque $e^{-\alpha t} \neq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}^+$) :

$$Q'(t) + (a - \alpha)Q(t) = bx_0$$

Il en découle que Q est un polynôme constant. Sa dérivée est le polynôme nul et l'égalité précédente devient :

$$Q(t) = \frac{b}{a-\alpha}x_0 = -\frac{b}{b+c}x_0$$

On a donc $R(t) = Ke^{-at} - \dfrac{b}{b+c}x_0 e^{-\alpha t}$.

Et comme $R(0) = R_0 = 0$, on a : $K = \dfrac{b}{b+c}x_0$.

Conclusion : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ R(t) = \dfrac{bx_0}{b+c}(e^{-at} - e^{-\alpha t})}$

c) Il suffit ici d'additionner...

$$x(t) = S(t) + R(t) = \frac{bx_0}{b+c}e^{-at} + \left(x_0 - \frac{bx_0}{b+c}\right)e^{-\alpha t}$$

Conclusion : $\boxed{x(t) = \dfrac{x_0}{b+c}(be^{-at} + ce^{-\alpha t})}$

Pour confronter cette réponse à la modélisation obtenue précédemment grâce à la méthode d'Euler on pourra exécuter la fonction suivante :

```python
def modelisation_evolutionX(a, b, c, S0, R0, t0, tf, h):
    T, X = euler(a, b, c, S0, R0, t0, tf, h)
    plt.plot(T, X)
    f = lambda t:(S0+R0)/(b+c)*(b*np.exp(-a*t)+c*np.exp(-(a+b+c)*t))
    T1 = np.linspace(t0, tf, 100)
    plt.plot(T1, f(T1))
    plt.grid()
    plt.show()
```

En exécutant `modelisation_evolutionX(1/27, 7/64, 1/64, 1300, 0, 0, 84, 0.5)` (pas de temps de 6 mois = une demi année), on obtient :

③ On s'intéresse à la proportion de morts au cours des ans.

a) On commence par étudier la cohorte fictive pour laquelle la variole n'existe pas (z désigne alors le nombre d'individus et $z(0) = x_0 = 1300$). On reprend le système différentiel précédent en notant que dans ce cas $c = 0$ mais aussi $b = 0$ puisque toute la population reste « susceptible ».

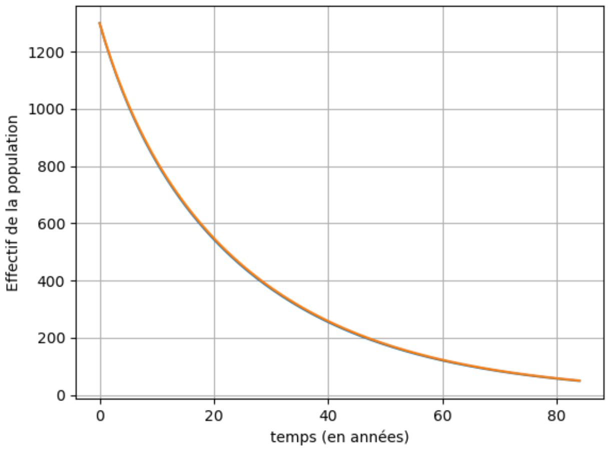
i. L'équation différentielle vérifiée par z est $z' = -az$ avec $z(0) = z_0 = x_0$.

Conclusion : $\boxed{z(t) = x_0 e^{-at}}$

ii. On commence par noter que $b + c = \dfrac{7}{64} + \dfrac{1}{64} = \dfrac{8}{64} = \dfrac{1}{8}$.

Dès lors :

$$\frac{z(t)}{x(t)} = \frac{x_0 e^{-at}}{\dfrac{x_0}{b+c}(be^{-at} + ce^{-\alpha t})} = \frac{e^{-at}}{8\left(\dfrac{7}{64}e^{-at} + \dfrac{1}{64}e^{-(a+b+c)t}\right)} = \frac{e^{-at}}{\dfrac{1}{8}(7 + e^{-t/8})e^{-at}}$$



On vient d'obtenir que $\dfrac{z(t)}{x(t)} = \dfrac{8}{7+e^{-t/8}}$. En multipliant en haut et en bas par $e^{t/8}$, on a : ***Conclusion*** : $\boxed{z(t) = \dfrac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}x(t)}$

Par ailleurs,

$$z(t) \geq x(t) \Leftrightarrow \frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}} > 1 \Leftrightarrow 8e^{t/8} > 1 + 7e^{t/8} \Leftrightarrow e^{t/8} > 1$$

Ce qui est vrai pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } t \in \mathbb{R}^+, \text{ on a : } z(t) > x(t)}$

iii. *On note que la proportion d'individus morts au cours du temps est donnée par* $p_m(t) = (z(0) - z(t))/z(0)$. Dès lors,

$$p_m(t) = 1 - \frac{z(t)}{z_0} = 1 - \frac{z(t)}{x_0} = 1 - e^{-at}$$

iv. La population est divisée par 2 si

$$p_m(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-at} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -at = -\ln(2) \Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{a}$$

Conclusion : $\boxed{t_{1/2} \approx 18.71 \text{ années en l'absence de variole}}$

b) Soit $y(t)$ le nombre d'individus dans une seconde cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais pour laquelle tous les nouveaux nés sont inoculés. On donne $1/200$ la probabilité qu'un individu décède des suites de l'inoculation.

i. On choisit de prendre pour conditions initiales $S_0 = 0$ car, avant même que les nourrissons soient confrontés à la maladie, la variole leur a été inoculée. Aucun n'est donc susceptible de l'attraper. Par ailleurs, si la probabilité vaut $1/200$ pour chaque nourrisson d'en mourir, alors la probabilité pour chacun d'eux de devenir « résistant » (ou « rétabli ») vaut $\gamma = 1 - 1/200 = 199/200$.

Dès lors, on peut considérer que le nombre de bébés résistants est initialement de $\dfrac{199}{200}x_0$ où $x_0 = 1300$ est l'effectif de la cohorte initiale.

On a donc légitimement : $R_0 = \gamma \times x_0$ où $\gamma = \dfrac{199}{200}$.

ii. *Réécrivons le système différentiel proposé par D. Bernoulli et justifions que* $y = \gamma z$ *:*

Le système différentiel devient : $\begin{cases} S'(t) &= 0 \\ R'(t) &= -aR(t) \\ y(t) &= S(t) + R(t) = R(t) \end{cases}$.

La deuxième équation donne immédiatement : $R(t) = R_0 e^{-at}$.

Conclusion : $\boxed{y(t) = R(t) = \frac{199}{200}x_0 e^{-at} = \gamma z(t)}$

iii. *On note cette fois la proportion d'individus morts $q_m(t)$. Exprimons $q_m(t)$ en fonction de γ et a :*

$$q_m(t) = 1 - \frac{y(t)}{x_0} = 1 - \frac{x_0\gamma}{x_0}e^{-at}$$

Conclusion : $\boxed{q_m(t) = 1 - \gamma e^{-at}}$

iv. On obtient la demi-vie de la cohorte inoculée de façon systématique en résolvant

$$q_m(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \gamma e^{-at} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -at = -\ln(2\gamma) \Leftrightarrow t = \frac{1}{a}\ln(2\gamma)$$

Conclusion : $\boxed{\text{Si la cohorte est inoculée à la naissance, } t_{1/2} = \frac{1}{a}\ln(2\gamma) \approx 18,58 \text{ années}}$.

c) On revient à la cohorte observée par Daniel Bernoulli.

i. Soit $r_m(t)$ la proportion de morts au fil des ans.
On a donc : $r_m(t) = 1 - \frac{x(t)}{x_0} = 1 - \frac{1}{8}(7 + e^{-t/8})e^{-at}$ d'après la question 3.a)(ii). Dès lors,

$$r_m(t) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{8}(7 + e^{-t/8})e^{-at} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (7 + e^{-t/8})e^{-t/27} = 4 \text{ (puisque } a = \frac{1}{27}\text{)}$$

ii. On pose : $f(t) = (7 + e^{-t/8})e^{-t/27}$.
Cette fonction est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
Elle est décroissante car

$$f'(t) = -\frac{1}{8}(7 + e^{-t/8})e^{-t/27} - \frac{1}{27}(7 + e^{-t/8})e^{-t/27} < 0$$

Si on note que $f(15) \approx 4,1$ et $f(16) = 3,94$, alors la continuité de f sur l'intervalle $[15, 16]$ assure grâce au théorème des valeurs intermédiaires qu'il existe $t_{1/2} \in [15, 16]/q_m(t) = \frac{1}{2}$.
Comme par ailleurs f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, c'est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $f(\mathbb{R}^+) = [0, 7]$.
Conclusion : $\boxed{\text{Le temps de demi-vie est unique et compris entre 15 et 16 années}}$

d) *concluons sur la position à adopter contre ou en faveur de l'inoculation :* D'après les questions qui précèdent :
— Si la variole n'existait pas (cas le plus favorable), le temps de demi-vie est de 18, 7 années.
— En cas de variole, si on inocule les nourrissons, avec les risques que ça implique, alors ce temps de demi-vie vaut 18, 6 années.
— En cas de variole, si on ne fait rien, ce temps de demi-vie est ramené à une durée comprise entre 15 et 16 années.

Conclusion : $\boxed{\text{Si } a \text{ est constant, il n'y a pas à hésiter, il faut inoculer les nourrissons.}}$

1.2 On suppose que a est une fonction du temps

① Cette hypothèse est celle privilégiée par D. Bernoulli.

a) *Expliquer pourquoi il semble légitime de ne pas considérer a comme une constante :* On considère que a est variable puisque le taux de mortalité hors variole pourrait être modifié au cours des années ; présence d'autres épidémies, évènements de catastrophes naturelles, de guerres, influence de la taille de la population, etc.

b) D'après le système différentiel, pour tout $t \geq 0$,

$$-x'(t) = -(-(a(t) + c)S(t) - a(t)R(t)) = a(t)R(t) + (a(t) + c)S(t)$$

Dès lors :

$$x'(t) + cS(t) = -(a(t) + c)S(t) - a(t)S(t) = -a(t)(S(t) + R(t)) = -a(t)x(t)$$

En divisant par x, on obtient :

Conclusion : $\boxed{a(t) = -\frac{1}{x(t)}(x'(t) + cS(t))}$

c) D'après le modèle, z décrit une population évoluant sans être touchée par la variole, donc est solution de $z' = -a(t)z$. Donc

$$z' = \frac{z(t)}{x(t)}(x'(t) + cS(t))$$

Conclusion : $\boxed{z'(t) = \frac{1}{x(t)}(x'(t) + cS(t))z(t)}$

② a) Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $q(t) = \frac{x(t)}{S(t)}$. *Écrivons l'équation différentielle vérifiée par q :*
On a d'après la formule de dérivée d'un quotient :

$$\begin{aligned}
q'(t) &= \frac{x'(t) \cdot S(t) - x(t) \cdot S'(t)}{S^2(t)} \\
&= \frac{1}{S^2(t)}[S(t)(-(a(t) + c)S(t) - a(t)R(t)) + x(t)S(t)(a(t) + b + c)] \\
&= -(a(t) + c) - a(t)\frac{R(t)}{S(t)} + q(t)(a(t) + b + c) \\
&= -(a(t) + c) - a(t)(q(t) - 1) + q(t)(a(t) + b + c) \text{ car } q(t) - 1 = \frac{x(t) - S(t)}{S(t)} = \frac{R(t)}{S(t)} \text{ et donc } \frac{R(t)}{S(t)} = q(t) - 1 \\
&= -c + q(b + c).
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{q \text{ est solution de } y' = (b + c)y - c.}$

b) *Résolvons cette équation différentielle :*
C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants. Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$,

$$q(t) = Ke^{-(b+c)t} + \frac{c}{b + c}$$

or

$$q(0) = \frac{x(0)}{S(0)} = \frac{S(0) + R(0)}{S(0)} = \frac{S(0)}{S(0)} = 1$$

Donc

$$1 = K + \frac{c}{b + c}$$

, ceci équivaut à

$$K = 1 - \frac{c}{b + c} = \frac{b}{b + c} = \frac{7/64}{8/64} = \frac{7}{8}$$

Conclusion : $\boxed{q(t) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{t/8}, \forall t \geq 0}$

③ a) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $H(t) = \ln\left(\frac{z(t)}{x(t)}\right)$. *Exprimons $H'(t)$ en fonction de q :*

On utilise à présent la dérivée d'une composée.

$$\begin{aligned}
H'(t) &= \left(\ln\left(\frac{z(t)}{x(t)}\right)\right)' \\
&= \frac{(z(t)/x(t))'}{(z(t)/x(t))} \\
&= \frac{\dfrac{z'(t)x(t) - z(t)x'(t)}{x^2(t)}}{\dfrac{z(t)}{x(t)}} \\
&= \frac{\dfrac{z'(t)}{z(t)}x(t) - x'(t)}{x(t)} \\
&= \frac{x'(t) + cS(t) - x'(t)}{x(t)} = \frac{cS(t)}{x(t)} = \frac{C}{q(t)}.
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $t \geqslant 0$,

$$H'(t) = \frac{c}{\dfrac{1}{8} + \dfrac{7}{8}e^{t/8}} = \frac{1/8^2}{\dfrac{1}{8} + \dfrac{7}{8}e^{t/8}}$$

Conclusion : $\boxed{H'(t) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1+7e^{t/8}}}$

b) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(t) = \dfrac{e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}$. On admet que $\dfrac{d}{dt}\ln(G) = H'(t)$.
C'est finalement uniquement l'égalité de gauche (dérivation d'une composée) qui est admise. **Intégrons** entre 0 et t pour tout $t \in \mathbb{R}^+$ l'égalité

$$(\ln(G))'(t) = \left(\ln\frac{z}{x}\right)'(t)$$

On obtient

$$\begin{aligned}
\ln G(t) - \ln G(0) &= \ln\frac{z(t)}{x(t)} - \ln\frac{z(0)}{x(0)} \\
\ln\left(\frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}\right) &= \ln\frac{z(t)}{x(t)} \text{ car } z(0) = x(0) \\
\frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}} &= \frac{z(t)}{x(t)} \text{ par composition par } exp
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{z(t) = \frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}x(t),\ \forall t \in\geq 0}$

④ Comme en 1.1.3) on montre que $y = \gamma z$ où $\gamma = \dfrac{199}{200}$.
Il suffit d'utiliser la question précédente pour avoir :

Conclusion : $\boxed{y(t) = \gamma \times \frac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}x(t)}$

Enfin,

$$\begin{aligned}
y(t) > x(t) &\Leftrightarrow \frac{8\gamma e^{t/8}}{1+7e^{t/8}} > 1 \Leftrightarrow 8\gamma e^{t/8} > 1 + 7e^{t/8} \\
&\Leftrightarrow (8\gamma - 7)e^{t/8} > 1 \Leftrightarrow e^{t/8} > \frac{1}{8\gamma - 7} \\
&\Leftrightarrow t/8 > \ln\left(\frac{1}{8\gamma-7}\right) \Leftrightarrow t > 8\ln\left(\frac{1}{8\gamma-7}\right)
\end{aligned}$$

Une application numérique permet d'obtenir : ***Conclusion*** : $\boxed{y(t) > x(t) \text{ dès que } t = 0,33 \text{ années}}$

ou encore $\boxed{\text{le protocole d'inoculation montre son efficacité au bout d'un trimestre.}}$

2 Estimation de la fonction a

① On dispose d'un fichier texte `data.txt` composé de deux lignes, ou figurent des données annuelles (indexées à partir de 0) sous la forme suivante :
— La première ligne du fichier contient le nombre de morts par d'autres maladies que la variole.
— La seconde ligne contient le nombre de survivants à l'issue de chaque année.
— sur chaque ligne, les données sont séparées par un espace (caractère `" "`).

a) Écrivons une fonction d'entête `extraction_ch()` qui renvoie une liste composée de deux chaînes de caractères : une correspondant à la première ligne de `data.txt` et l'autre à la seconde.
On exploite les rappels proposés en annexe. Une écriture possible est :

```python
def extraction_ch():
    f = open("data.txt", "r")
    ligne_1 = f.readline()
    ligne_2 = f.readline()
    f.close()
    return [ligne_1, ligne_2]
```

On pourra vérifier, sur le contenu simplifié ci-dessus, que `extraction_ch()` renvoie :

`['283 133 47 30 21 13\n', '1000 855 798 760 732 710 692']`

b) Compléter la fonction suivante d'entête `ch_vers_list(ch)` prenant en entrée une chaîne de caractère (de même forme que celles renvoyées par `extraction_ch`) et qui renvoie la liste de nombres correspondant : ces nombres seront de type flottant.
La variable `sh` stocke les segments de chaînes de caractères non vides. Dès qu'on tombe sur le caractère vide on la remet au vide puis on recommence le parcours de la tranche suivante. Le `append` final sert à ajouter la dernière tranche qui est calculée car non prise en compte dans `L`.

```python
def ch_vers_list(ch):
    L = []
    n = len(ch)
    sh = ""
    for k in range(0, n):
        if ch[k] != " ":
            sh = sh+ch[k]
        else:
            L.append(float(sh))
            sh = ""
    L.append(float(sh))
    return L
```

c) *Écrivons une fonction d'entête* `division(L1, L2)` *prenant en entrée deux listes de nombres flottants. Cette fonction renvoie le booléen* `False` *si les deux listes ne sont pas de la même longueur, sinon elle renvoie la liste contenant les divisions terme à terme des éléments de* `L1` *par ceux de* `L2` *(on suppose qu'il n'y a pas de terme nul dans* `L2`*) :*
Une structure conditionnelle suffit pour répondre à cette question, selon que les listes `L1` et `L2` sont de même longueur, ou non.

```python
def division(L1, L2):
    n = len(L1)
    if len(L1) != len(L2):
        return False
    else:
        return [L1[i]/L2[i] for i in range(n)]
```

d) Pour la suite d'instructions qui crée la liste `Lnorm` précédemment définie, on fait la synthèse des question précédentes.

```
def creeLnorme():
    L = extraction_ch()
    morts = ch_vers_list(L[0])
    survivants = ch_vers_list(L[1])
    return division(morts, survivants)
```

② On se propose d'estimer la fonction a représentant le taux de morts hors variole au cours du temps. On note $(\ell_t)_{t\in[\![0,83]\!]}$ les valeurs relevées sur la cohorte du nombre de morts hors variole pour les 84 années de l'étude, stockées dans la liste `Lnorm`. Le graphique des valeurs numériques de ℓ_t pour les 24 premières années est donné en figure 1. On admettra que le comportement en temps long reste stable. On définit la fonction $M : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ par :

$$\forall(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\quad M(\lambda,\mu,\gamma)=\sum_{t=0}^{83}\left(\ell_t-\lambda \mathrm{e}^{-\mu t}-\gamma\right)^2$$

a) Un premier choix, non retenu pour la suite, aurait été de considérer, à la place de M, la fonction $\widetilde{M}$ suivante :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \widetilde{M}(\alpha,\beta)=\sum_{t=0}^{83}\left(\ell_t-\alpha t-\beta\right)^2.$$

i. Le problème de minimisation de $\widetilde{M}$ correspond précisément au problème de recherche d'une droite de régression au sens des moindres carrés. En effet, si l'on note $\mathcal{D} : y=\alpha x+\beta$, alors pour tout $t\in[\![0,83]\!]$, la quantité $(l_t-\alpha t-\beta)^2$ est l'écart au carré entre (t,l_t) et l'unique point situé sur $\mathcal{D}$ d'abscisse t. On cherche donc à approcher le nuage de points $\{(t,l_t)\}_{0\leqslant t\leqslant 83}$ par une droite.

ii. En minimisant M on cherche en revanche à approcher $\{(t,l_t)\}_{0\leqslant t\leqslant 83}$ par un modèle exponentiel, c'est-à-dire par une courbe d'équation $y=\lambda e^{-\mu t}+\gamma$.
C'est la décroissance rapide, observée en 0, qui permet de privilégier un modèle exponentiel décroissant plutôt qu'un modèle polynomial.

b) Dans le modèle, on a :

$$\gamma = \lim_{t\to+\infty}\left(\lambda e^{-\mu t}+\gamma\right)$$

On peut donc choisir pour γ en évaluant « à la louche » la hauteur de l'asymptote observée, soit $\boxed{\gamma\approx 0.01=\gamma_0}$.
Pour calculer λ_0, on peut par exemple regarder la valeur en zéro. Nous avons :

$$\boxed{\lambda\cdot 1+\gamma_0=0.28\equiv\lambda\approx 0.27=\lambda_0}$$

c) *À quoi correspond la fonction ci-dessous ?*

```
def M_mu(mu):
    lamb = lambda0
    gam = gamma0
    s = 0
    for k in range(len(Lnorm)):
        s += (Lnorm[k]-lamb*exp(-mu*k)-gam)**2
    return s
```

Les valeurs de λ_0 et γ_0 étant approchées expérimentalement, cette fonction renvoie :

$$\texttt{M\_mu}(\mu)=\sum_{t=0}^{83}\left(\ell_t-\lambda_0\mathrm{e}^{-\mu t}-\gamma_0\right)^2$$

d) Le tracé de la fonction `M_mu` est donné en figure 1, ci-dessous.
Le minimum de cette fonction minimise la fonction $s:\mu\longmapsto\texttt{M\_mu}(\lambda_0,\mu,\gamma_0)$, autrement dit, permet d'approcher visuellement la valeur μ_0 pour laquelle l'écart au carré entre les valeurs expérimentales et le modèle sont le plus faibles...
On peut estimer ici que $\boxed{\mu_0\approx 0.8}$

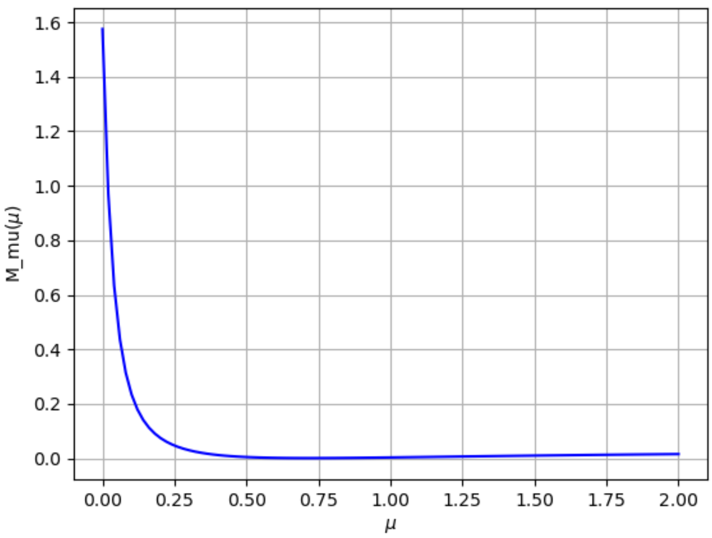


FIGURE 1 – Tracé de la fonction `M_mu`

③ a) On dispose de la fonction suivante, où f est une fonction et x, y deux réels.

```
def argmin2(f, x, y):
    if f(x) <= f(y):
        return x
    else:
        return y
```

b) *Écrivons une fonction* `argmin3(f, x, y, z)` *qui utilise* `argmin2()` *et renvoie parmi les trois valeurs* x, y *et* z*, celle en laquelle* f *est minimale :*
On se contente de chercher les meilleurs candidats 2 à 2. Soit :

```
def argmin3(f, x, y, z):
    meill_xy = argmin2(f, x, y)
    return argmin2(f, meill_xy, z)
```

c) Écrivons une fonction d'entête `minimum(f, A, B, eps)` qui programme l'algorithme déterminant x^*.
✐ On nous demande que le choix de x^g et de x^d soit tel qu'ils découpent $[g_k; d_k]$ en trois parties égales.

```
1  def minimum(f, A, B, eps):
2      g = A
3      d = B
4      while d-g > eps:
5          xg = g + (d-g)/3
6          xd = d - (d-g)/3
7          if f(xg) < f(xd):
8              d = xd
9          elif f(xg) > f(xd):
10             g = xg
11         else:
12             d = xd
13             g = xg
14     return argmin3(f, g, d, (g+d)/2)
```

Commentaires :
— en lignes `L1` et `L2` on initialise l'intervalle d'étude ($g = g_0$ et $d = d_0$).

— A chaque entrée dans la boucle « Tant que » on construit de nouveaux intervalles dont la longueur vaut parfois $2/3$ de la longueur précédente, parfois $1/3$ de cette longueur (*Attention : rien n'à voir ici avec une dichotomie !*). Les intervalles ont des longueurs de plus en plus petites, de limite nulle. Il existe donc un nombre fini d'entrées dans la boucle à partir duquel cette longueur est plus petite que ε.
Cela justifie la condition donnée en `L4`.

— Ł5 et Ł6 font en sorte que $[g_k, d_k]$ découpe l'intervalle $[g_{k-1}, d_{k-1}]$ en trois parties égales.

— Les lignes `L7` à `L13` mettent en place l'algorithme proposé dans le sujet et renvoient `g` et `d` qui sont les nouvelles bornes de l'intervalle.

— A l'issue de cette boucle « Tant que », on renvoie, parmi les trois points g_k, d_k et $m_k = m([g_k, d_k])$, celui en lequel f est la plus petite.

④ On revient dans cette question à la problématique de la question 2 et on considère toujours γ et λ fixés aux valeurs γ_0 et λ_0 précédemment trouvées. Cependant, μ_0 est à déterminer à l'aide de la fonction minimum écrite en question 3, plutôt que par lecture graphique.

a) *Écrivons une fonction d'entête* `test_croissant(L)` *prenant en entrée une liste de nombres et qui renvoie un booléen indiquant si les valeurs de L sont triées par ordre croissant :* On peut considérer que c'est une question de cours. Il ne faut pas passer à côté !

```python
def test_croissant(L):
    for i in range(len(L)-1):
        if L[i+1] < L[i]:
            return False
    return True
```

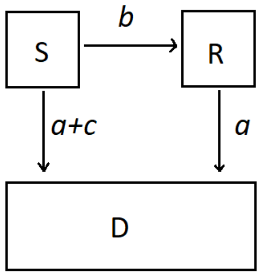
b) *À l'aide de* `test_croissant`*, on nous demande un raisonnement pour tester si la fonction* `M_mu` *est bien croissante sur l'intervalle* $[0, 8; 3]$ *:* Il suffit de former la liste des valeurs de `M_mu` sur une subdivision de l'intervalle $[0, 8; 3]$, et on teste la fonction `test_croissant` sur cette liste.

c) *Proposons une instruction pour trouver la valeur* μ_0 *cherchée :* La valeur μ_0 est finalement le minimum de $\mu \longmapsto M(\lambda_0, \mu, \gamma_0)$, qui est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont on possède le graphe. Cela revient donc numériquement à trouver le minimum de cette fonction...
Autrement dit, il suffit d'exécuter `minimum(M_mu, 0, 2, 0.01)`

d) On trouve $\mu_0 \approx 0,7151$: commenter et conclure sur l'estimation de la fonction a.
On rappelle que `Lnorm` contient les proportions d'individus morts d'autres maladies sur le nombre de vivants sur chaque intervalle de temps $[t, t+1]$. Dans notre modèle cela correspond à la valeur $a(t)$, puisque les intervalles de temps sont de longueur 1 (en années). On a donc bien : $\dfrac{a(t)S(t) + a(t)R(t)}{S(t) + R(t)} = a(t)$.
Or, d'après les questions précédentes, puisque $\mu \longmapsto M(\lambda_0, \mu, \mu_0)$ est quasiment nulle en μ_0, le modèle exponentiel $l_t \approx \lambda e^{-\mu t} + \gamma$ semble particulièrement adapté.
Conclusion : L'hypothèse « a constant » est **inadaptée**

3 Modèle individu-centre

Contrairement à l'étude de Bernoulli on ne s'intéresse plus dans cette partie à toute la cohorte mais à un seul individu vivant dans la cohorte dont l'état (susceptible, remis ou mort) est modélisé par une variable aléatoire. Dans ce cas le modèle étudié peut être résumé par le schéma suivant dans lequel une classe d'état D a été rajoutée, correspondant à l'état mort :



Soit un individu donné dans la population. Le temps (en années) sera désormais noté n et ne prendra que des valeurs entières positives. On note X_n la variable aléatoire correspondant à l'état de l'individu au temps $n \in \mathbb{N}$ et on conviendra que $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$ et $(X_n = 2)$ sont respectivement les événements « l'individu au temps n est Susceptible »,« l'individu au temps n est Remi » et « l'individu au temps n est Mort »(✐ On a donc $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ Les paramètres a, b et c représentent ici des probabilités conditionnelles et sont ici supposées constantes au cours du temps (avec $a \neq 0$. Ainsi par exemple, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, un individu susceptible au temps n aura une probabilité b d'être remis au temps $n + 1$.

Pour tout instant $n \in \mathbb{N}$ on définit le vecteur Z_n des probabilités suivant :

$$Z_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

① On suppose qu'au temps 0 l'individu est susceptible. *Donnons les matrices colonnes Z_0 et Z_1 :*

On suppose qu'au temps 0 l'individu est susceptible, il est dans l'état 0, et donc

$$(X_0 = 0) = \Omega, \quad (X_0 = 1) = \emptyset, \quad (X_0 = 2) = \emptyset$$

Ainsi,

$$Z_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_0 = 0) \\ \mathbb{P}(X_0 = 1) \\ \mathbb{P}(X_0 = 2) \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Passons au calcul de Z_1, on utilise les lois conditionnelles sachant l'état précédent (au temps 0). Le dessin du modèle ne fournit en revanche pas toutes les probabilités conditionnelles. Mais puisqu'une probabilité conditionnelle est une probabilité, il vient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 0) + \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) + \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2) = 1$$

donc

$$\mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 1) = 1 - (a + c) - b = 1 - (a + b + c). \quad (\star)$$

Par ailleurs, puisque $(X_0 = 0) = \Omega$, on a $\mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_0 = 1)) = 0 = \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_0 = 2))$ Dès lors, en utilisant la Formule des Probabilités Totales, avec le système complet d'événements $\{(X_0 = 0), (X_0 = 1), (X_0 = 2)\}$, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_1 = 0) &= \mathbb{P}((X_1 = 0) \cap (X_0 = 0)) \\ &= \mathbb{P}_{(X_0=0)}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1 - (a + b + c), \end{aligned}$$

d'après ($\star$) pour $n=0$. On fait de-même pour la seconde coordonnée :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=1) &= \mathbb{P}(X_1=1\cap(X_0=0))\\ &= \mathbb{P}_{(X_0=0)}(X_1=1)\mathbb{P}(X_0=0)\\ &= b\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1=2) &= \mathbb{P}((X_1=2)\cap(X_0=0))\\ &= \mathbb{P}_{(X_0=0)}(X_1=2)\mathbb{P}(X_0=0)\\ &= a+c\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{Z_1=\begin{pmatrix}1-(a+b+c)\\ b\\ a+c\end{pmatrix}}$

② On définit une matrice Q :

$$Q=\begin{pmatrix}1-(a+b+c) & 0 & 0\\ b & 1-a & 0\\ a+c & a & 1\end{pmatrix}$$

a) *Montrons à l'aide de la formule des probabilités totales que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a : $Z_{n+1}=Q\times Z_n$.* On utilise le même raisonnement que précédemment en utilisant la formule des probabilités totales avec cette fois le système complet d'événements $\{(X_n=0),(X_n=1),(X_n=2)\}$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=0) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=0)\cap(X_n=0))+\mathbb{P}((X_{n+1}=0)\cap(X_n=1))+\mathbb{P}((X_{n+1}=0)\cap(X_n=2))\\ &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)\mathbb{P}(X_n=0) \text{ car si l'individu est rétabli ou mort à t=n...}\\ &= (1-(a+b+c))\mathbb{P}(X_n=0)\text{... il ne peut devenir susceptible à t=n+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=1) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=1)\cap(X_n=0))+\mathbb{P}((X_{n+1}=1)\cap(X_n=1))+\mathbb{P}((X_{n+1}=1)\cap(X_n=2))\\ &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=1)\mathbb{P}(X_n=2)\\ &= b\mathbb{P}(X_n=0)+(1-a)\mathbb{P}(X_n=1)+0\mathbb{P}(X_n=2)\end{aligned}$$

Et enfin :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_{n+1}=2) &= \mathbb{P}((X_{n+1}=2)\cap(X_n=0))+\mathbb{P}((X_{n+1}=2)\cap(X_n=1))+\mathbb{P}((X_{n+1}=2)\cap(X_n=2))\\ &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)\mathbb{P}(X_n=0)+\mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)\mathbb{P}(X_n=1)+\mathbb{P}_{(X_n=2)}(X_{n+1}=2)\mathbb{P}(X_n=2)\\ &= (a+c)\mathbb{P}(X_n=0)+a\mathbb{P}(X_n=1)+1\mathbb{P}(X_n=2)\end{aligned}$$

b) On montre par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, Z_n=Q^nZ_0$ (cf. TD)

c) Soit le système homogène (S_λ) : $(Q-\lambda I_3)X=0$ où $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$.

$$(S_\lambda)\Leftrightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}\text{1-(a+b+c)-}\lambda & 0 & 0 & 0\\ \text{b} & \text{1-a-}\lambda & 0 & 0\\ \text{a+c} & \text{a} & \text{1-}\lambda & 0\end{array}\right)$$

Ce système admet au moins une solution non nul s'il n'est pas de Cramer, autrement dit si son rang ne vaut pas 3, ce qui est le cas pour trois valeurs $\boxed{\lambda_1=1-(a+b+c),\ \lambda_2=1-a \text{ et } \lambda_3=1}$

Comme $b+c>0$ et $a>0$, on a bien $\lambda_1<\lambda_2<1$. Et de plus on suppose naturellement que $a+b+c<1$ car si $a+b+c=1$ cela signifie qu'une personne saine en un temps ne peut rester saine au temps suivant (✐ cela aurait mérité d'être précisé dans l'énoncé). Finalement on a bien $\boxed{0<\lambda_1<\lambda_2<1=\lambda_3}$

d) *Résolvons le système (S_λ) pour chacune des trois valeurs de λ obtenues :* Constatons d'abord que $a+b+c \neq 0$ et, si jamais on se posait la question, on peut aussi affirmer que $a \neq 0$ et que $b \neq 0$.

$$\begin{aligned}
(A-(1-(a+b+c))I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = 0 \\ bx + (b+c)y & = 0 \\ (a+c)x + ay + (a+b+c)z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -\frac{1}{b}(b+c)y \\ -\frac{(a+c)(b+c)}{b}y + \frac{ab}{b}y + (a+b+c)z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -\frac{b+c}{b}y \\ -\frac{ac+bc+c^2}{b}y + (a+b+c)z & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = -\frac{b+c}{b}y \\ -\frac{c}{b}(a+b+c)y + (a+b+c)z & = 0 \Leftrightarrow z = \frac{c}{b}y \end{cases}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(S_{\lambda_1}) = \{(-\frac{b+c}{b}y, y, \frac{c}{b}y), y \in \mathbb{R}\} = \{(-(b+c)y, by, cy), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{((b+c), b, c)\}}$.

$$\begin{aligned}
(A-(1-a)I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -(b+c)x & = 0 \\ bx & = 0 \\ (a+c)x + ay + az & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ ay + az & = 0 \Leftrightarrow y + z = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(S_{\lambda_2}) = \{(0, y, -y), y \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(0, 1, -1)\}}$

$$\begin{aligned}
(A-I_3)X = 0 &\Leftrightarrow \begin{cases} -(a+b+c)x & = 0 \\ bx - ay & = 0 \\ (a+c)x + ay & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x & = 0 \\ ay & = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow x = y = 0.
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{(S_{\lambda_3}) = \{(0, 0, z), z \in \mathbb{R}\} = \text{Vect}\,\{(0, 0, 1)\}}$

e) Nous choisissons comme solutions respectivement de (S_{λ_1}), (S_{λ_2}) et (S_{λ_3}) les vecteurs :

$$u_1 = (-(b+c), b, c),\ u_2 = (0, 1, -1) \text{ et } u_3 = (0, 0, 1)$$

Alors,

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(b+c) & 0 & 0 \\ b & 1 & 0 \\ c & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice d'ordre 3 est de rang 3 car matrice triangulaire avec trois pivots non nuls.
Conclusion : $\boxed{P \text{ est inversible}}$.

Déterminons P^{-1} : On peut au choix utiliser la méthode « en miroir »ou la résolution de système. C'est cette dernière méthode qui est choisie pour la suite en posant $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} -(b+c)x' & = x \\ bx' + y' & = y \\ cx' - y' + z' & = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' & = -\dfrac{1}{b+c}x \\ y' & = y - bx' = y + \dfrac{b}{b+c}x \\ z' & = z - cx' + y' = z + \dfrac{c}{b+c}x + (y + \dfrac{b}{b+c}x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' & = -\dfrac{1}{b+c}x \\ y' & = y + \dfrac{b}{b+c}x \\ z' & = x + y + z \end{cases}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{b+c} & 0 & 0 \\ \dfrac{b}{b+c} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}$

f) On calcule $D = P^{-1}QP$... et on obtient($\lambda_1 = 1 - (a+b+c)$, $\lambda_2 = 1 - a$ et $\lambda_3 = 1$:

Conclusion : $\boxed{D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}}$

g) On rappelle que $Z_n = Q^n Z_0$ pour tout $n \geq 0$ (cf. 2.b)).
Et d'après la question précédente : $Q = PDP^{-1}$.
On montre alors par récurrence que $Q^n = PD^nP^{-1}$ (cf TD07 - ex 6 !)

$$\textbf{Conclusion :}\ Z_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} Z_0$$

Dans la suite on admet que :

$$Z_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \dfrac{-b\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c} \\ 1 - \dfrac{c\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c} \end{pmatrix}$$

h)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{n\to\infty} \lambda_1^n = 0 \qquad \text{car } |\lambda_1| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 1) = \lim_{n\to\infty} \frac{-b\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c} = 0 \qquad \text{car } |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 2) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{c\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c}\right) = 1 \qquad \text{car } |\lambda_1| < 1, |\lambda_2| < 1$$

En temps long, l'individu étudié mourra donc avec probabilité égale à un... *What a surprise !* D'une certaine façon ça valide la cohérence des calculs menés jusque là. Mathématiquement, on parlera de *convergence en loi* (notion hors programme) et on pourra dire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la loi $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, qui correspond à la mort de l'individu.

③ a) Soit A_n l'évènement « l'individu vit exactement n années ».
L'évènement A_n est aussi « l'individu est dans l'état 0 ou 1 l'année n et passe dans l'état 2 à l'année $n+1$ ».
En terme d'ensembles, on a :

$$\begin{aligned} A_n &= ((X_n = 0) \cup (X_n = 1)) \bigcap (X_{n+1} = 2) \\ &= ((X_n = 0) \cap (X_{n+1} = 2)) \bigcup ((X_n = 1) \cap (X_{n+1} = 2)) \end{aligned}$$

Les deux événements étant incompatibles, on a :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_n) &= \mathbb{P}(X_n = 0, X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}(X_n = 1, X_{n+1} = 2) \\ &= \mathbb{P}_{(X_n=0)}(X_{n+1} = 2)\mathbb{P}(X_n = 0) + \mathbb{P}_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 2)\mathbb{P}(X_n = 1) \\ &= (a+c)\lambda_1^n + a\frac{-b\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c} \text{ d'après la question précédente} \\ &= \frac{c(a+b+c)}{b+c}\lambda_1^n + \frac{ab}{b+c}\lambda_2^n. \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbf{P}(A_n) = \frac{c(a+b+c)}{b+c}\lambda_1^n + \frac{ab}{b+c}\lambda_2^n}$

Dans la suite, conformément aux indications de l'énoncé, on admet que le premier terme est négligeable devant le deuxième et on prend :

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{ab}{b+c}\lambda_2^n$$

b) Soit $\rho \in]0,1[$ et soit $\Sigma = \sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^n$. Justifier que Σ est bien définie et montrer que $\Sigma = \frac{\rho}{(\rho-1)^2}$:

C'est une question de cours. Il suffit de dire que $\sum_{n \geq 0} n\rho^{n-1}$ est une série géométrique dérivée convergente car $0 < \rho < 1$. Donc la série $\sum_{n \geq 0} n\rho^n$ converge car la multiplication par le scalaire ρ ne change pas sa nature

Par ailleurs, $\sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \rho \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \rho \frac{1}{(\rho-1)^2}$. Ce qu'il fallait obtenir.

c) Montrons que l'espérance de vie d'un individu à la naissance est égale à : $\mathcal{E} = \frac{b(1-a)}{a(b+c)}$ On nous indique qu'on pourra voir l'espérance de vie comme l'espérance de la variable aléatoire

$$T = \max\{n \in \mathbb{N}, X_n \neq 2\}.$$

En suivant l'indication, on peut écrire que $A_n = (T = n)$.
Dès lors, en appliquant la question précédente avec $\rho = \lambda_2$, on en déduit que $\sum n\mathbb{P}(T = n) = \sum n\mathbb{P}(A_n)$ converge puisque $\lambda_2 \in]0,1[$ et

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(A_n) = \frac{ab}{b+c}\sum_{n=0}^{\infty} n\lambda_2^n = \frac{ab\lambda_2}{(b+c)(1-\lambda_2)^2} = \frac{ab(1-a)}{(b+c)a^2}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{E}(T) = \frac{b(1-a)}{(b+c)a}}$

d) *Application numérique* : dans le cas de la variole,

$$\mathcal{E} = \mathbb{E}(T) = \frac{\frac{7}{64}\frac{62}{64}}{\frac{2}{64}.\frac{8}{64}} = \frac{7 \times 31}{8} = \boxed{27.125}$$

On a une espérance de vie semblable à l'espérance de vie réelle, l'hypothèse « a constant »est donc cohérente avec la réalité pour le modèle individu-centré.

FIN DU SUJET