MATHEMATIQUES
Algèbre linéaire

Le sujet se compose d'un ***exercice*** *et de* ***deux problèmes****. On prendra soin de lire l'ensemble des énoncés avant de commencer à composer.*
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice n'****est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercice :

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, rapporté à une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Pour tout réel a, on on considère l'endomorphisme f_a de E associé défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \text{ et } f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

① Écrire en Python une fonction `f_a(x,y,z,a)` qui renvoie les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$ de $f_a(u)$ pour tout vecteur $u = (x, y, z)$ exprimé lui aussi dans la base $\mathcal{B}$.

② a) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f_a)$.
b) Montrer que $(e_2, e_1 - e_3)$ est une base de $\mathrm{Ker}(f_a)$.

③ Écrire la matrice A de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A^2. En déduire $f_a \circ f_a$.

④ On pose $e'_1 = f_a(e_1)$, $e'_2 = e_1 - e_3$ et $e'_3 = e_3$.
a) Montrer que (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de E.
b) Déterminer la matrice A' de f_a dans cette base.
c) La matrice A est-elle inversible ?

⑤ Pour tout réel x non nul, on pose $B(x) = A - xI_3$ où I_3 désigne la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
a) Justifier que la matrice $B(x)$ est inversible pour tout x non nul.
b) Exprimer $(A - xI_3)(A + xI_3)$ puis $(B(x))^{-1}$ en fonction de x, I_3 et A.
c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer $(B(x))^n$ en fonction de x, n, I_3 et A.

Problème 1 :

Dans ce problème, on note $\mathcal{E} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique $\big((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\big)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$. On note Id l'application identité de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même et O l'application nulle. Pour tout couple de nombres réels (a, b), on note $J(a, b)$ la matrice

$$J(a,b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}.$$

Enfin, on note Φ l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

① Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, on a

$$[J(a,b)]^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1} & 0 \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

② a) Montrer que $\Phi^3 + \Phi^2 - 5\Phi + 3\,\mathrm{Id} = O$.

b) On note $P(X)$ le polynôme $P(X) = X^3 + X^2 - 5X + 3$. Montrer que $P(X)$ possède une racine double que l'on explicitera. En déduire une factorisation de P dans $\mathbb{R}$.

c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^3$ un vecteur **non nul** tels que $\Phi(u) = \lambda u$.
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\Phi^k(u) = \lambda^k u$.
Déduire de la question 2.a) que $(\exists u \neq 0 / \Phi(u) = \lambda u) \Rightarrow P(\lambda) = 0$.

③ a) Soit $E_{-3} = \mathrm{Ker}(\Phi + 3Id)$. Montrer que $E_{-3} \neq \{0\}$ et donner une base du sous-espace vectoriel E_{-3} formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1. Que pouvez-vous dire de l'image par Φ des vecteurs de E_{-3} ?

b) Soit $E_1 = \mathrm{Ker}(\Phi - Id)$. Montrer que $E_1 \neq \{0\}$ et donner une base du sous-espace vectoriel E_1 formée de vecteur(s) de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.
Que pouvez-vous dire de l'image par Φ des vecteurs de E_1 ?

c) Montrer en utilisant la question 2.c) qu'il ne peut pas exister dans $\mathbb{R}$ d'autres valeurs de λ que -3 et 1 pour lesquelles $E_\lambda = \mathrm{Ker}(\Phi - \lambda Id) \neq \{0\}$.

④ a) Déterminer $x \in \mathbb{R}^3$, de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, vérifiant

$$\Phi(x) = x + \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_i.$$

b) Donner une base du sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Ker}([\Phi - \mathrm{Id}]^2)$ formée de vecteurs de derni'ere coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1.

c) Montrer que E est stable par Φ ou encore que $\Phi(E) \subset E$ et que la juxtaposition d'une base de E et de $\mathrm{Ker}(\Phi + 3\,\mathrm{Id})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

⑤ a) Donner une base $\mathcal{E}'$ de $\mathbb{R}^3$, formée de vecteurs de dernière coordonnée sur la base $\mathcal{E}$ égale à 1, dans laquelle la matrice de Φ vaut $M' = J(1, -3)$.

b) Exprimer la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{E}'$. En déduire une relation entre M et M' et, pour tout n entier naturel, exprimer la matrice M^n à l'aide de n, P, P^{-1} et M' puis calculer la première colonne de M^n.

⑥ Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ la suite à valeurs réels définie par

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad u_2 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = -u_{n+1} + 5u_n - 3u_{n-1}.$$

a) Écrire une fonction Python d'argument un entier n et renvoyant la valeur de u_n.

b) Dans les trois dernières questions, on note $(U_n)_{n\geq 0}$ la suite de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ de coordonnées (u_{n+2}, u_{n+1}, u_n) dans la base $\mathcal{E}$. Montrer que, pour tout n entier naturel, $U_{n+1} = \Phi(U_n)$.

c) En déduire que, pour tout n entier naturel, $U_n = \Phi^n(U_0)$ puis, à l'aide de 5. b), une expression de u_n.

Problème 2 :

Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$$

① **Recherche de sous-espaces vectoriels caractéristique de f.**

On pose $M_\lambda = A - \lambda I = \dfrac{1}{6}\begin{pmatrix} -6\lambda & 3 & 3 \\ -4 & 6-6\lambda & 4 \\ -2 & 3 & 5-6\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et on appelle (S_λ) le système homogène associé, à savoir : $M_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) Montrer qu'il existe trois valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) admet au moins une solution non nulle. On notera désormais λ_1 et λ_2 et λ_3 ces trois valeurs avec $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$.

b) Soit E_λ l'espace vectoriel solution de (S_λ) dans chacun de ces trois cas.
Montrer que $E_{\lambda_1} = \text{Vect}\{u_1\} = \text{Vect}\{(1,1,1)\}$, $E_{\lambda_2} = \text{Vect}\{u_2\} = \text{Vect}\{(1,0,1)\}$ et que $E_{\lambda_3} = \text{Vect}\{u_3\} = \text{Vect}\{(0,-1,1)\}$.

c) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

d) Exprimer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$.

② **Calcul des puissances successives de A.**

a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

b) Soit $D = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$. Exprimer D en fonction de A, P et P^{-1} et montrer que

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{pmatrix}$$

c) Calculer D^n pour tout entier naturel n.

d) Démontrer que $D^n = P^{-1}A^nP$ pour tout entier naturel n.

e) En déduire l'expression de A^n.

③ **Étude d'une suite matricielle**

Soit B une matrice appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
Nous définissons la suite matricielle $(X_n)_{n\geq 0}$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} X_0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N},\ X_{n+1} = AX_n + B. \end{cases}$$

Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Considérons les endomorphismes a et b de E définis par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(b) = B$.

a) Si il existe une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$, démontrer que $\mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$.

b) On suppose à nouveau qu'il existe $L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

   i. Considérons alors la suite matricielle $(Y_n)_{n\geq 0}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N},\ Y_n = X_n - L$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, Y_{n+1} en fonction de A et Y_n.
   En déduire, pour tout entier naturel n, Y_n en fonction de A, n et Y_0.

   ii. Démontrer que pour tout entier naturel n, $X_n = A^n(X_0 - L) + L$.

④ **Un exemple**

Dans cette question, nous admettons la réciproque de la question 3.a), soit :

$$\exists L \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})/L = AL + B \Leftrightarrow \mathrm{Im}(b) \subset \mathrm{Im}(id_E - a)$$

Nous choisissons par ailleurs

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E.
Considérons l'endomorphisme a de E défini par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a) = A$.
Démontrer que pour qu'un vecteur v de composantes (x, y, z) dans $\mathcal{B}$ appartienne à $\mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - a)$, il faut et il suffit que $x - y - z = 0$.

b) Justifier l'existence d'une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.
✐ : *On rappelle à toute fin utile que* $\mathrm{Im}(b) = \mathrm{Vect}\{b(e_1), b(e_2), b(e_3)\}$

c) Déterminer, par le calcul, une matrice L' appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L' = DL' + P^{-1}BP$.
On choisira cette matrice de manière à ce que les trois éléments de sa première ligne soient nuls.
À partir de cette matrice L', déterminer une matrice L appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $L = AL + B$.

d) Soit n appartenant à $\mathbb{N}$. Déterminer l'expression de la limite de la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$ en fonction de X_0 et de L.

- FIN -