9 Applications linéaires et matrices.

- Applications linéaires, endomorphismes, isomorphismes, opérations sur les applications linéaires. Noyau - lien avec l'injectivité. Image - lien avec la surjectivité.
- Cas de la dimension finie. Détermination d'une application linéaire par l'image d'une base. Une application linéaire est un isomorphisme si, et seulement si, l'image d'une base est une base. Théorème du rang. Equivalence entre l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité **pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension** (finie).
- Matrices et applications linéaires. Matrice de la somme, du produit par un scalaire et de la composée d'applications linéaires. Matrice de l'application réciproque.
- Changement de base. Matrice de passage. Action d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'un endomorphisme. Matrices semblables.

Exercice 1 : ✶

Pour chacune des applications ci-dessous :

① Montrer que ce sont des endomorphismes.

② Déterminer leur noyau et leur image en précisant les cas où les applications sont injectives, surjectives ou bijectives.

③ Donner leur représentation matricielle dans les bases canoniques des espaces vectoriels concernés. Montrer comment retrouver les réponses à la question 2.

➢ f_1 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f_1(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(3x - z, -x + 2y + z, -x + 3z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

➢ f_2 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f_2(x,y,z) = \dfrac{1}{2}(3x + y - 2z, -x + y + 2z, -x + y + 2z)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

➢ f_3 définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f_3(x,y,z) = \left(\dfrac{-y+z}{2}, \dfrac{y-z}{2}, \dfrac{-y+z}{2}\right)$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

➢ f_4 définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f_4(P) = \dfrac{P(0)+P'(0)}{2}(1 + X + X^2)$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

➢ f_5 définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f_5(P) = P(0)(X + X^2) + P'(0)X + \dfrac{P''(0)}{2}(1 - X)$, $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$

Exercice 2 :✶✶ [Agro 2005]

Les espaces vectoriels $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis de leurs bases canoniques usuelles.
Soient $f : \mathbb{R}^2 \longmapsto \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R}^2$ deux applications linéaires. On suppose que la matrice représentant l'endomorphisme $h = f \circ g$ est la matrice :

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

① Rappeler le lien entre $\mathrm{Im}h$ et $\mathrm{Im}f$, $\mathrm{Ker}h$ et $\mathrm{Ker}g$

② Montrer que $h \circ h = h$ et que $\mathrm{rg}(h) = 2$

③ En déduire que $\text{rg}(f) = \text{rg}(g) = 2$

④ Montrer que l'application $g \circ f$ est l'application identité de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 : ✶✶

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(n \geq 2)$. On définit l'application f sur $\mathbb{R}_3[X]$ par :

$$f : P \longmapsto P + (1 - X)P'$$

① Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

② Écrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$

③ Déterminer une base $\mathcal{B}_1$ de $\text{Ker} f$ et une base $\mathcal{B}_2$ de $\text{Im} f$. Montrer que la juxtaposition de ces deux bases forme une base de $\mathbb{R}_3[X]$.

④ Montrer que $(1, 1 - X, (1 - X)^2, (1 - X)^3)$ est également une base de $\mathbb{R}_3[X]$. Écrire la matrice D de f dans cette base.

Exercice 4 ✶✶ :

Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, $\mathcal{B}$ sa base canonique et f une application définie sur E par :

$$f(P) = Q \text{ où } Q(X) = P(X + 1)$$

① Montrer que f est un automorphisme de E.

② Écrire la matrice M canoniquement associée à f.

③ Justifier l'inversibilité de M et exprimer M^{-1}

Exercice 5 : ✶✶

Pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f_{a,b}(x) = (ax + b)e^{2x}$ pour tout x réel.
On définit alors $E = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / \exists a, b \in \mathbb{R}, f = f_{a,b}\}$

① Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on déterminera une base $\mathcal{B}$.

② Soit φ définie sur E par : $\forall f \in E$, $\varphi(f) = f'$

- **a.** Montrer que $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Définir les applications φ^2 et φ^3
- **b.** Déterminer la matrice M de φ dans la base $\mathcal{B}$. Calculer M^2 et M^3.

③ Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Déterminer une solution de l'équation différentielle :

$$y''' - y'' - 2y' - 3y = (-\lambda x + 4)e^{2x}$$

Exercice 6 : ✶

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'application φ définie sur $E = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$ par $\varphi(f) = g$ où $g(x) = f'(x) + x^2 f(x)$

① Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et que φ est un endomorphisme de E.

② déterminer $\text{Ker}\varphi$.

③ Montrer que φ est surjective. En quoi a-t-on obtenu un contre-exemple d'un théorème du cours d'algèbre linéaire en dimension finie ?

Exercice 7 : ✶

Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}$ sa base canonique. On considère la famille $(1 + X + X^2, 1 - X + X^2, 1 - X - X^2)$ de E.

① Montrer que la famille définie ci-dessus constitue une base de E qu'on nommera $\mathcal{B}'$ par la suite.

② Soient $P_1 = 1 + X$, $P_2 = X^2$ et $P_3 = -1 + X - X^2$. Exprimer les coordonnées de ces trois vecteurs dans la base $\mathcal{B}'$.

③ Écrire les matrices dans la base $\mathcal{B}'$ des endomorphismes f_4 et f_5 définis dans l'exercice 1. Que pouvez-vous dire de ces applications ?

Exercice 8 : ✶✶

Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice canoniquement associée est :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

① Montrer que A est nilpotente ($\exists p \in \mathbb{N}^*/A^p = 0$)

② A est-elle inversible ?

③ **a.** Trouver $u \in \mathbb{R}^3/f^2(u) \neq 0$.

b. Montrer avec le minimum de calculs que $(u, f(u), f^2(u))$ est une base de $\mathbb{R}^3$

④ Écrire la matrice A' de f dans cette nouvelle base.

Exercice 9 : ✶ Matrices semblables I

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que A et B sont semblables.
En déduire une interprétation de $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ telle que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ où $\mathcal{B}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 10 : ✶✶ Matrices semblables II

On souhaite montrer que si A est une matrice non nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ alors A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On considérera pour ça la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

① Montrer que $\dim(\mathrm{Im} f) = 1$ et $\dim(\ker f) = 2$

② *Analyse :* On suppose que A et T sont semblables. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ telle que $T = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f)$

③ Conclure.

④ *Application :* Montrer que $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et T sont semblables.

Planches d'oraux

Planche 1 : Oral Agro 2016

Un scientifique étudie une population de souris femelles uniquement. Il note les propriétés suivantes :

- Chacune des souris donne naissance en moyenne à une femelle pendant sa première année de vie et à 8 femelles pendant sa deuxième année.
- La probabilité pour qu'une souris femelle survive une deuxième année est de 0.25 et il n'y a aucune chance qu'elle survive au-delà de la deuxième année.

On distingue donc deux catégories de souris femelles : les jeunes, âgées de moins d'un an et les adultes dont l'âge est compris entre un et deux ans.
Notons pour tout entier naturel n, après n années, j_n le nombre de jeunes souris femelles et a_n le nombre de souris adultes femelles.

① Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que les hypothèses ci-dessus peuvent se traduire par le système suivant :

$$\begin{cases} j_{n+1} &= j_n + 8a_n \\ a_{n+1} &= 0.25 j_n \end{cases}$$

On représente la population des souris femelles à l'aide du vecteur $S_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix}$. Expliciter alors une matrice L telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on ait : $S_{n+1} = LS_n$.

② En déduire une expression de S_n en fonction de L, S_0 et de n.

③ **a.** Déterminer deux vecteurs U_1 et U_2 pour lesquels il existe un réel α_1 et α_2 vérifiant $LU_i = \alpha_i U_i$. Montrer qu'ils forment une base de $\mathbb{R}^2$.
b. Soient λ et μ les coordonnées de S_0 dans la base (U_1, U_2). Exprimer S_n en fonction de λ, μ et n.

④ On considère que la population initiale est composée de 20 jeunes souris femelles et d'aucune souris adulte femelle.

a. Écrire un programme informatique qui permette de retourner les listes $[j_0, j_1, \cdots, j_{10}]$ et $[a_0, a_1, \cdots, a_{10}]$.
b. Exprimer j_n et a_n en fonction de n.
c. On désigne par t_n le nombre total de souris femelles après n années.
Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = 15 \times 2^n + 5 \times (-1)^n$.
d. Déterminer la limite de $\dfrac{t_{n+1}}{t_n}$ quand n tend vers $+\infty$. Interpréter ce résultat.
Vers quelle répartition jeune/adulte semble tendre la population ?

Planche 2 : Oral Agro 2021

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On définit l'application Tr qui, à toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ associe la somme de ses éléments diagonaux :

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \mathrm{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} M_{i,i} \text{ où les } M_{i,j} \text{ sont les coefficients de } M$$

① Écrire une fonction `trace` qui prend en argument une matrice (donnée par exemple sous forme de liste de listes) et qui renvoie sa trace.

② Montrer que l'application Tr est une application linéaire.

③ Montrer que $\mathrm{Im}(\mathrm{Tr}) = \mathbb{R}$ et en déduire la dimension de $\mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$.

④ On se place dans cette question dans le cas où $n = 2$.

a. Donner une base du noyau de Tr.

b. Soit I_2 la matrice identité de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de la forme xI_2, avec $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathcal{D}_2(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.

c. Soit $\mathcal{C}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices C de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que, pour toute matrice B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on a : $CB = BC$. Montrer que $\mathcal{C}_2(\mathbb{R}) = \mathcal{D}_2(\mathbb{R})$.

On revient désormais au cas général.

⑤ Montrer que, pour toutes matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on : $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Pour tous entiers $1 \leq i, j \leq n$, on définit la matrice $E^{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par ses coefficients $E^{i,j}_{i,j} = 1$ et $E^{i,j}_{k,l} = 0$ si $k \neq i$ ou $l \neq j$.

⑥ Expliquer pourquoi la famille $\left(E^{i,j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑦ Pour tous entiers $1 \leq i, j, k, l \leq n$ tels que $j \neq k$, montrer que $E^{i,j}E^{j,k} = E^{i,k}$ et $E^{i,j}E^{k,l} = 0$.

⑧ Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ une application linéaire vérifiant $f(AB) = f(BA)$ pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

a. Montrer que $f(E^{i,j}) = 0$ si $i \neq j$ et que $f(E^{i,i})$ ne dépend pas de i.

b. Montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $f(A) = x\mathrm{Tr}(A)$ pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

⑨ A-t-on $\mathrm{Tr}(ABC) = \mathrm{Tr}(ACB)$ pour toutes matrices $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?