8 T.D. Espaces vectoriels.

- **Structure vectorielle** : Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs ; sous-espaces vectoriels, intersection finie de ssev ; ssev engendré par une famille fini de vecteurs
Famille génératrice fini d'un espace vectoriel (sous réserve d'existence) ; Famille libre, famille liée finie ; Base finie d'un espace vectoriel et coordonnées d'un vecteur dans une base.
Matrice des coordonnées d'une famille finie de vecteurs dans une base.
- **Dimension** : De toute famille génératrice fini d'un ev E on peut extraire une base.
Dans un ev de dimension n : Toute famille libre a au plus n éléments, une famille libre ayant n éléments est une base ; toute famille génératrice a au moins n éléments , une famille génératrice ayant n éléments est une base. Si F est ssev de E alors $\dim F \leq \dim E$. Si les deux dimensions sont égales alors $F = E$.

Exercice 1 ✶ : Dire dans chacun des cas suivants si les ensembles F sont sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels E donnés.

① $E = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$ $(n = 2$ ou $3)$:

① $F_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + 3y = 1\}$
② $F_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 2x - y = 0\}$
③ $F_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y \geq 0\}$
④ $F_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 0\}$
⑤ $F_5 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x - y + z = 0 \text{ et } 2x + z = 0\}$
⑥ $F_6 = \{(a, b, a + b) / (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$

② $E = \mathbb{R}[X]$ ou $E = \mathbb{R}_n[X]$:

① $F_1 = \{P \in \mathbb{R}[X] / P(0) = 1\}$
② $F_2 = \{P \in \mathbb{R}[X] / \deg(P) \geq 3\}$
③ $F_3 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] / P(2) = 0\}$
④ $F_4 = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P(2) = 0\}$
⑤ $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(1) = P'(1) = 0\}$
⑥ $F_6 = \{P \in \mathbb{R}_n[X] / P(X + 1) - P(X) = 0\}$

③ $E = \mathbb{R}^I$ ou $E = \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R})$, $(n \in \mathbb{N})$

① $F_1 = \{f \in \mathbb{R}^I / f \text{ constante sur } I\}$
② $F_2 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ croissante sur } \mathbb{R}\}$
③ $F_3 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f \text{ est } 2\pi\text{-périodique}\}$
④ $F_4 = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} / f(0) = 2\}$
⑤ $F_5 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f'(x) = 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
⑥ $F_6 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f''(x) = 3f'(x) - 2f(x), \forall x \in \mathbb{R}\}$
⑦ $F_7 = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}) / f''(x) + f'(x) + f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2 ✶ : Dire si les familles suivantes sont libres dans l'espace E considéré

① $E = \mathbb{R}^3$, $F_1 = \{(1,2,3),(2,1,2),(1,3,-1)\}$ et $F_2 = \{(1,2,3),(2,1,2),(1,-1,-1)\}$

② $E = \mathbb{C}^3$, $\mathbb{C}$-ev ; $F = \{(1,-1,i),(1,i,1),(i-1,2,-2i)\}$

③ $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{X, X(X-1), X^2(X+1)\}$

④ $E = \mathbb{R}_2[X]$, $F = \{X^2,(X-1)^2,(X+1)^2\}$

⑤ $E = \mathbb{R}_3[X]$, $F = \{3+3X+X^2+X^3, 1-X-X^2+X^3, -1-X+X^2+X^3, X+2X^2+X^3\}$

⑥ $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{x \longmapsto e^{kx}, k \in [\![0,n]\!]\}$

Exercice 3 ✶ : Bases

① Donner une base de chacun des ssev suivants, abordés dans **l'exercice 1** sous les numéros suivants :

1.,2),4),5),6) ; **2.**3),4),5),6) ; **3.**5),6), 7)

② Soit $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}^*} / \exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, f(x) = x(\alpha \ln^2(x) + \beta)\}$. Démontrer que F est un $\mathbb{R}$-ev et en donner une base.

③ Soit la famille $\mathcal{F} = \{u_1, u_2, u_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B}$ avec

$$u_1 = (1,0,1)_{\mathcal{B}},\ u_2 = (-1,-1,0)_{\mathcal{B}} \text{ et } u_3 = (-1,1,1)_{\mathcal{B}}$$

Montrer que (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et déterminer les coordonnées de $v = (2,2,3)_{\mathcal{B}}$ dans cette nouvelle base.

④ Démontrer que dans l'ev $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ B_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

d'une part, et les matrices

$$A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix},\ B_2 = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d'autre part, engendrent le même sous-espace vectoriel.

⑤ Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $E = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$

a. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie.

b. Montrer que $M \in E \Leftrightarrow \exists(a,b,c) \in \mathbb{R}/M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$

c. Déterminer la dimension de E

d. Montrer que (I, A, A^2) est une base de E.

Exercice 4 ✶ : rang d'une famille de vecteurs

En utilisant l'écriture matricielle d'une famille de vecteurs, déterminer le rang des familles finies suivantes :

① $\mathcal{F}_1 = \{(1,0,1),(1,1,0),(2,1,1),(4,2,2)\}$

② $\mathcal{F}_2 = \{(1,-1,0,2,1),(2,1,1,3,-1),(0,1,1,2,1),(4,-2,0,5,0)\}$

③ $\mathcal{F}_3 = \{1-X+2X^2, 3+X+X^2, -3-5+4X^2\}$

④ $\mathcal{F}_4 = \{X+3X^2, -1+X, 2+X^2, 4+5X+6X^2\}$

Exercice 5 ✶✶ : Polynômes interpolateurs de Lagrange

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \cdots, a_n$ n nombres réels distincts. On définit des polynômes de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ par :

$$L_k(X) = \prod_{1 \leq i \leq n, i \neq k} \frac{X - a_i}{a_k - a_i},\ k \in [\![1, n]\!]$$

① Calculer $L_k(a_j)$ pour tout $(k, j) \in [\![1, n]\!]^2$

② Montrer que $\mathcal{L} = (L_1, L_2, \cdots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$

③ Exprimer la décomposition d'un polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base $\mathcal{L}$

④ Soit $p \in [\![0, n-1]\!]$. Quel est le polynôme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i^p L_i$?

Donner la matrice des coordonnées de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ dans la base $\mathcal{L}$

Exercice 6 ❤ : Oral Agro 2010

Dans le $\mathbb{R}$ espace vectoriel E des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on considère le sous-espace vectoriel F engendré par les fonctions f_1, f_2 et f_3 définies par :

$$f_1 : x \longmapsto e^{-x},\ f_2 : x \longmapsto (x-1)e^{-x} \text{ et } f_3 : x \longmapsto (x^2+1)e^{-x}$$

① Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de F. On la notera $\mathcal{B}$.

② A toute fonction f de F, on associe la fonction $\Phi(f)$ définie par $\Phi(f) = f'$. Montrer que Φ est une application linéaire et que $\forall f \in F$, $\Phi(f) \in F$.

③ Écrire la matrice A des coordonnées de la famille de vecteur $\mathcal{F}' = \{\Phi(f_1), \Phi(f_2), \Phi(f_3)\}$ dans la base $\mathcal{B}$. En déduire que $\mathcal{F}'$ est une nouvelle base de F.

④ Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.