CORRECTION
Equations différentielles et calcul matriciel (3H00)

Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de trois manières différentes la puissance n-ième d'une matrice.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Première méthode :

   a) *Exprimons J^n en fonction de J pour tout entier naturel n* :
   Un calcul rapide montre que $J^2 = 3J$.
   On va montrer par récurrence que $J^n = 3^{n-1}J$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

   — $J^1 = J = 3^0 J$ suffit à initialiser cette récurrence pour $n = 1$.
   — On suppose que $J^n = 3^{n-1}J$ pour un entier $n \geq 1$.
   — Alors $J^{n+1} = J^n J = 3^{n-1}J^2 = 3^{n-1}3J = 3^n J$. Ce qui prouve l'hérédité de la relation.

   Conclusion : $\boxed{J^n = 3^{n-1}J,\ \forall n \geq 1 \text{ et } J^0 = I}$

   b) *Déterminons deux réels a et b tels que $M = aI + bJ$* :

   $$M = aI + bJ \Leftrightarrow \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b & b & b \\ b & b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & b & b \\ b & a+b & b \\ b & b & a+b \end{pmatrix}$$

   Or deux matrices sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux.
   On obtient donc le système : $\begin{cases} a+b & = 1/2 \\ b & = 1/4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \dfrac{1}{4}$.

   Conclusion : $\boxed{M = \dfrac{1}{4}I + \dfrac{1}{4}J}$; *Rque* : on pouvait aussi noter directement que $4M = I + J$

   c) *Calculons M^n pour tout entier naturel n* :
   Si $n = 0$, $M^n = M^0 = I$.
   Sinon, la relation précédente nous invite à utiliser la formule du binôme de Newton, ce qui est possible car I et J commutent.
   Alors, $\forall n > 0$:

   $$M^n = \left(\frac{1}{4}I + \frac{1}{4}J\right)^n = \frac{1}{4^n}(I+J)^n = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} J^k$$

   On utilise alors le résultat de la question 1. en prenant soin de distinguer le cas $k = 0$.
   Dès lors :

   $$\begin{aligned} M^n &= \frac{1}{4^n}\left[\binom{n}{0} J^0 + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} J^k\right] = \frac{1}{4^n}\left[I + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} 3^{k-1}J\right] \\ &= \frac{1}{4^n}\left[I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} 3^k\right) J\right] = \frac{1}{4^n}\left[I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} 3^k - 1\right) J\right] \\ &= \frac{1}{4^n}\left(I + \frac{4^n - 1}{3}J\right) = \frac{1}{4^n}I + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4^n}\right) J \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{M^n = I \text{ si } n = 0 \text{ et } M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} \\ 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} \\ 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n} \end{pmatrix} \text{ si } n \in \mathbb{N}^*}$

2. Deuxième méthode :

   a) Après calculs... on obtient : $\boxed{M^2 - \frac{5}{4}M + \frac{1}{4}I = 0}$

   b) On déduit de la question précédente que : $M(M - \frac{5}{4}I_3) = -\frac{1}{4}I_3 \Leftrightarrow M(-4M + 5I_3) = I_3$.
   ou encore $(-4M + 5I_3)M = I_3$
   On en déduit l'inversibilité de M et $M^{-1} = -4M + 5I_3$

   Conclusion : $\boxed{M \text{ inversible et } M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}}$

   c) *Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$* :

   — *Initialisation* : La propriété est vraie pour $n = 0$ car $M^0 = I = 0M + 1I$. On a dans ce cas $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   — On suppose la propriété vraie au rang n. C'est-à-dire $\exists(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / M^n = a_nM + b_nI$.
   — *Hérédité* :

   $$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (a_nM + b_nI) \times M = a_nM^2 + b_nM \\ &= a_n\left(\frac{5}{4}M - \frac{1}{4}I\right) + b_nM = \left(\frac{5}{4}a_n + b_n\right)M - \frac{1}{4}a_nI \end{aligned}$$

   En posant $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$ on prouve l'existence de deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$. La propriété est vraie au rang $n + 1$.

   — ***Conclusion*** : $\boxed{\text{La propriété est vraie pour tout entier naturel } n}$

   d) D'après ce qui précède, on a $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
   On sait déjà que $a_0 = 0$ et $b_0 = 1$.
   Comme $M^1 = 1.M + 0.I$ on en déduit que $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

   e) *Montrons que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre* 2 : La question précédente permet d'assurer que : $a_{n+2} = \frac{5}{4}a_{n+1} + b_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

   D'où, sachant que pour tout entier naturel n : $b_{n+1} = -\frac{1}{4}a_n$, on a :

   $$a_{n+2} = \frac{5}{4}a_{n+1} - \frac{1}{4}a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   Conclusion : $\boxed{(a_n)_{n\geq 0} \text{ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2}}$.

Son équation caractéristique et : $r^2-\frac{5}{4}r+\frac{1}{4}$ dont les racines sont les mêmes que celles de l'équation $4r^2-5r+1=0$, c'est-à-dire $r=1$ et $r=\frac{1}{4}$.

D'où $a_n=\lambda 1^n+\mu\left(\frac{1}{4}\right)^n$, $\forall n\in\mathbb{N}$.

Les conditions à l'origine permettent d'obtenir le système $\begin{cases}\lambda+\mu & =0\\ \lambda+\frac{1}{4}\mu & =1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda & =\frac{4}{3}\\ \mu & =-\frac{4}{3}\end{cases}$.

Dès lors :

$$a_n=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \text{ et } b_n=-\frac{1}{4}a_{n-1}=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
M^n &= \left[\frac{4}{3}-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}+\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]\times I\\
&= \left[\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\times\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}+\left[-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]\times I\\
&= \frac{1}{3}\left(\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\times\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}+\left[-1+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right]\times I\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]\times\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}+\left[-1+4\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right]\times I\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{M^n=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n}\\ 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n}\\ 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n}\end{pmatrix} \text{ si } n\in\mathbb{N}}$

3. Troisième méthode : On pose $A_\lambda=M-\lambda I=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2-4\lambda&1&1\\1&2-4\lambda&1\\1&1&2-4\lambda\end{pmatrix}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

   a) Soit (S_λ) le système homogène $A_\lambda\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

      i. (S_λ) n'est pas un système de Cramer si et seulement si la matrice associée A_λ n'est pas inversible ou encore si et seulement si $\mathrm{rg}(A_\lambda)<3$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}A_\lambda=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}2-4\lambda&1&1\\1&2-4\lambda&1\\1&1&2-4\lambda\end{pmatrix} &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2-4\lambda\\1&2-4\lambda&1\\2-4\lambda&1&1\end{pmatrix}\begin{matrix}(L_3)\\(L_2)\\(L_1)\end{matrix}\\
&= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&1&2-4\lambda\\0&1-4\lambda&-(1-4\lambda)\\0&-1+4\lambda&1-(2-4\lambda)^2\end{pmatrix}\begin{matrix}(L_1)\\(L_2-L_1)\\(L_3-(2-4\lambda)L_1)\end{matrix}
\end{aligned}$$

avec $1-(2-4\lambda)^2 = [1-(2-4\lambda)][1+(2-4\lambda)] = (4\lambda-1)(3-4\lambda)$.
D'où :

$$\begin{aligned}\mathrm{rg} A_\lambda &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-4\lambda\\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda)\\ 0 & -1+4\lambda & (4\lambda-1)(3-4\lambda)\end{pmatrix}\\ &= \mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2-4\lambda\\ 0 & 1-4\lambda & -(1-4\lambda)\\ 0 & 0 & P(\lambda)\end{pmatrix} \begin{matrix}(L_1)\\ (L_2)\\ (L_3+L_2)\end{matrix}\end{aligned}$$

avec $P(\lambda) = (1-4\lambda)(4\lambda-3) - (1-4\lambda) = (1-4\lambda)(4\lambda-3-1) = 4(1-4\lambda)(\lambda-1)$.

En conséquence, $\mathrm{rg}A_\lambda < 3 \Leftrightarrow 1-4\lambda = 0$ ou $P(\lambda) = 0 \Leftrightarrow 1-4\lambda = 0$ où $\lambda - 1 = 0$.

Conclusion : $\boxed{(S_\lambda) \text{ n'est pas de Cramer si } \lambda = \lambda_1 = 1 \text{ ou } \lambda = \lambda_2 = \dfrac{1}{4}}$

ii. Soit E_λ l'espace vectoriel solution de (S_λ) dans chacun de ces deux cas.
Par définition, $E_{\lambda_1} = E_1 = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 / A_1 \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \ (S_1)\}$
D'après ce qui précède, en prenant $\lambda = 1$, on obtient :

$$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases}x+y-2z &= 0\\ -3y+3z &= 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y &= z\\ x &= z\end{cases}, \forall z \in \mathbb{R}$$

Conclusion : $\boxed{E_1 = \{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}\{(1,1,1)\}}$

Par définition, $E_{\lambda_2} = E_{\frac{1}{4}} = \{(x,y,x) \in \mathbb{R}^3 / A_{\frac{1}{4}} \cdot \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \ (S_{\frac{1}{4}})\}$
D'après ce qui précède, en prenant cette fois $\lambda = \dfrac{1}{4}$, on obtient :

$(S_{\frac{1}{4}}) \Leftrightarrow x+y+z = 0 \Leftrightarrow z = -y-z,\ \forall (y,z) \in \mathbb{R}^2$

Conclusion : $\boxed{E_{\frac{1}{4}} = \{(-y-z,y,z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\} = \mathrm{Vect}\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}}$

b) *Soit* $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$. *Montrons que* P *est inversible et calculer* P^{-1} :

On pose $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$.
P est inversible si et seulement si le système associé $PX = X'$ est un système de Cramer.
On aura alors $X = P^{-1}X'$.

$$PX = X' \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z &= x' \\ x + z &= y' \\ x + y &= z' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = y' - x & (L_2) \\ y = z' - x & (L_3) \\ xy - z = x - z' + x - y' + x = x' & (L_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x &= \dfrac{1}{3}(x' + y' + z') \\ y &= z' - \dfrac{1}{3}(x' + y' + z') = \dfrac{1}{3}(-x' - y' + 2z') \\ z &= y' - \dfrac{1}{3}(x' + y' + z') = \dfrac{1}{3}(-x' + 2y' - z') \end{cases}$$

L'unicité de la solution prouve qu'il s'agit bien d'un système de Cramer.

Conclusion : $\boxed{P \text{ est inversible et } P^{-1} = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}}$

c) *Calculons $D = P^{-1}MP$ ainsi que D^n pour tout entier naturel n :*
Un calcul rapide donne :

$$P^{-1}MP = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} = D}$

On montre alors par une récurrence immédiate que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix}}$$

d) *Démontrons par récurrence que $D^n = P^{-1}M^nP$ pour tout entier naturel n :*

— La relation est vraie pour $n = 0$ puisque $D^0 = I = P^{-1}IP$ et vraie pour $n = 1$ d'après la question 3.c)
— Supposons la vraie pour un entier $n \geq 0$.
— Alors $D^{n+1} = D^n \cdot D = P^{-1}M^nP \cdot P^{-1}MP = P^{-1}M^nIMP = P^{-1}M^{n+1}P$.
Ce qui prouve l'hérédité de cette relation.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = P^{-1}M^nP}$

e) De l'égalité précédente, on tire en multipliant à gauche par P, à droite par P^{-1} :
$\forall n \in \mathbb{N},\ PD^nP^{-1} = PP^{-1}M^nPP^{-1} = M^n$.

On obtient dès lors aisément :
$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (1/4)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/4)^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} \\ 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} \\ 1-\frac{1}{4^n} & 1-\frac{1}{4^n} & 1+\frac{2}{4^n} \end{pmatrix},\ \forall n \in \mathbb{N}}$

Problème 2 :

Première partie

① a) *Rappelons les relations liant la somme et le produit des racines ω_1 et ω_2 aux coefficients a, b et c de l'équation $(\mathcal{C})$:* Le théorème de factorisation des polynômes donne :

$$ar^2 + br + c = a(r - \omega_1)(r - \omega_2).$$

En développant le second membre, on obtient alors

$$ar^2 + br + c = a(r^2 - (\omega_1 + \omega_2)r + \omega_1\omega_2).$$

On en déduit le résultat par identification des coefficients.

$$\boxed{\omega_1 + \omega_2 = -b/a \quad \omega_1\omega_2 = c/a}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Bien sûr, question globalement réussie... 85% mais pas 100% ! Cependant, les candidats ont intérêt à prendre le temps de lire les questions... aucune preuve n'était attendue, on ne demande pas ω_1 et ω_2 en fonction de a, b et c... Et le coefficient d'une équation du second degé n'est pas toujours égale à 1.* »

b) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (ε_2') sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Posons : $z = y' - \omega_1 y$.

i. *Montrons que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$:* Si y est de classe C^2, alors y' est de classe C^1 et z est clairement C^1, en tant que combinaison linéaire de fonctions C^1 et par ailleurs :

$$\begin{aligned} z' - \omega_2 z &= y'' - (\omega_1 + \omega_2)y' + \omega_1\omega_2 y \\ &= \frac{1}{a}\left(ay'' + by' + cy\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

ii. On déduit alors une expression de z du fait que toute solution de l'équation $z' - \omega_2 z = 0$ est de la forme $x \mapsto \lambda e^{\omega_2 x}$, avec λ un réel.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^{\omega_2 x}.}$$

iii. On vient de prouver que y est solution de l'équation différentielle

$$y' - \omega_1 y = \lambda e^{\omega_2 x} \quad (\star),\ (\lambda \in \mathbb{R})$$

Or on sait que la solution générale de l'équation homogène associée à $(\star)$ est $\boxed{y_0 : x \mapsto \mu e^{\omega_1 x}}$. Il ne reste donc plus qu'à déterminer une **solution particulière** de $(\star)$.

D'après la forme du second membre, on sait que $(\star)$ admet une solution particulière de la forme $y_p(x) = P(x)e^{\omega_2 x}$.
alors $y_p'(x) = (P'(x) + \omega_2 P(x))\, e^{\omega_2 x}$. Et donc :

$$y_p'(x) - \omega_1 y_p(x) = (P'(x) + (\omega_2 - \omega_1)P(x))\, e^{\omega_2 x} = \lambda e^{\omega_2 x}$$

Après simplification, on obtient :

$$P'(x) + (\omega_2 - \omega_1)P(x) = \lambda \qquad (\star\star)$$

— *Premier cas :* Si $\omega_1 = \omega_2$, $(\star\star) \Leftrightarrow P'(x) = \lambda \Rightarrow P(x) = \lambda x + b$, $b \in \mathbb{R}$.
Soit $y_p(x) = (\lambda x + b)e^{\omega_2 x} = (\lambda x + b)e^{\omega_1 x}$ une solution particulière (✐ on peut tout à fait envisager de prendre $b = 0$ puisque c'est une solution « particulière »...)

— *Second cas :* Si $\omega_1 \neq \omega_2$ alors $(\star\star) \Rightarrow \deg(P) = 0$.
En posant $P(x) = a$, $a \in \mathbb{R}$, on a $(\star\star) \Leftrightarrow (\omega_2 - \omega_1)a = \lambda \Leftrightarrow a = \dfrac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1}$.
Soit, si y_p solution de $(\star)$, alors $y_p(x) = \dfrac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1}e^{w_2 x}$. On vérifie aisément que la réciproque est vraie...

Conclusion : $\boxed{y(x) = y_0(x) + y_p(x) = \begin{cases} \mu e^{\omega_1 x} + \dfrac{\lambda}{\omega_2 - \omega_1}e^{w_2 x} & \text{si } \omega_1 \neq \omega_2 \\ (\lambda x + \mu)e^{\omega_1 x} & \text{si } \omega_1 = \omega_2 \end{cases}}$

Soit :

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2,\ y \text{ est de la forme } x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}}$$

et

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 = \omega_2,\ y \text{ est de la forme } x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}, \text{ avec } A, B \text{ des réels.}}$$

Lu dans le rapport de jury : « *La résolution de $z' - \omega_2 z = 0$ ne pose pas de souci (pour 75% des candidats !) même si la rédaction ne respecte pas souvent la nature des objets... confusion entre ensemble, fonction, valeur de la fonction en un point, même si les phrases utilisées sont incomplètes... « $e^{\omega_2 x}$ est une solution ».*
1/3 des candidats ne voient pas qu'alors y est solution d'une équation différentielle du premier ordre... première difficulté de deux questions qui s'enchaînent.
La recherche d'une solution particulière est plus délicate, soit par une méthode de variation de la constante à la présentation technique sans trop savoir ce qui se passe, soit par la proposition d'une solution particulière mais qui n'est pas toujours vérifiée.
Beaucoup de candidats sont passés à côté de cette équation en y et ont donné directement l'expression de y vue en cours.
Mais comme nous l'avons dit ci-dessus, la question demandait clairement de résoudre l'équation en y et ainsi de démontrer le résultat de cours. »

c) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 = \omega_2$. *Montrons que, pour toutes constantes réelles A et B, les fonctions $x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}$ sont solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$:*
Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$u'(x) = Ae^{\omega_1 x} + \omega_1(Ax + B)e^{\omega_1 x}$$
$$u''(x) = 2\omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_1^2(Ax + B)e^{\omega_1 x}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} au''(x) + bu'(x) + cu(x) &= e^{\omega_1 x}\left(Ax\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + B\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + A\left(2a\omega_1 + b\right)\right) \\ &= e^{\omega_1 x}\left(AxP(\omega_1) + BP(\omega_1) + AP'(\omega_1)\right) \end{aligned}$$

où on a posé $P(r) = ar^2 + br + c$. Mais lorsque $\omega_1 = \omega_2$, dire que ω_1 et ω_2 sont les racines de P c'est dire que ω_1 est une racine double de P. Cela donne $P(\omega_1) = P'(\omega_1) = 0$, ce qui donne le résultat recherché.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } A \text{ et } B\text{, les fonctions } x \mapsto (Ax+B)\, e^{\omega_1 x} \text{ sont solutions de } \left(\varepsilon_2'\right) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

Déduisons-en l'ensemble S_2' des solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$:
On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$Vect\,(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x}) \subset S_2'.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S_2' est de la forme $x \mapsto Axe^{\omega_1 x} + Be^{\omega_1 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question précédente. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 = \omega_2,\ S_2' = Vect\,(x \mapsto xe^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_1 x})}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Les calculs ont été laborieux...*
Et le schéma analyse-synthèse ou double inclusion n'a pas été mis en avant (environ 5% des candidats sont convaincants !), beaucoup se demandent pourquoi on leur fait faire deux fois la même chose.
»

d) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 \neq \omega_2$.
Montrons que pour toutes constantes réelles A et B, les fonctions $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ sont solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$ et déduisons-en l'ensemble S_2' des solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$ dont on admettra qu'il s'agit là aussi d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel :
Soient A, B deux réels, et u la fonction définie par $u(x) = Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$. Le calcul de ses dérivées donne :

$$u'(x) = \omega_1 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2 Be^{\omega_2 x}$$
$$u''(x) = \omega_1^2 Ae^{\omega_1 x} + \omega_2^2 Be^{\omega_2 x}$$

On en déduit alors, pour tout réel x :

$$au''(x) + bu'(x) + cu(x) = Ae^{\omega_1 x}\left(a\omega_1^2 + b\omega_1 + c\right) + Be^{\omega_2 x}\left(a\omega_2^2 + b\omega_2 + c\right) = 0.$$

D'où le résultat recherché.

$$\boxed{\text{Pour tous réels } A \text{ et } B\text{, les fonctions } x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x} \text{ sont solutions de } \left(\varepsilon_2'\right) \text{ sur } \mathbb{R}.}$$

On vient d'établir l'inclusion suivante :

$$Vect\,(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x}) \subset S_2'.$$

Réciproquement, il faudrait prouver que tout élément de S_2' est de la forme $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$, mais on remarque que cela a été fait à la question 1.2. D'où le résultat.

$$\boxed{\text{Si } \omega_1 \neq \omega_2,\ S_2' = Vect\,(x \mapsto e^{\omega_1 x}, x \mapsto e^{\omega_2 x})}$$

e) *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - y = xe^x$:*
Il suffit d'utiliser la méthode qui vient d'être établie, en remarquant que l'équation caractéristique associée admet 1 et -1 comme racines.

Conclusion : $\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } y'' - y = 0 \text{ est } \{x \longmapsto Ae^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}}$
ou encore :

$$\boxed{\text{L'ensemble des solutions de } y'' - y = 0 \text{ est } Vect\left(x \mapsto e^x, x \mapsto e^{-x}\right).}$$

Cherchons maintenant une solution particulière y_p : Conformément à l'indication de l'énoncé, on cherche y_p sous la forme $y_p(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$.
✐ On peut prendre $c = 0$ puisque $x \longmapsto ce^x$ est solution de l'équation homogène !
Alors :

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= (2ax + b + ax^2 + bx)e^x \\ &= (ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= (2ax + (2a + b) + ax^2 + (2a + b)x + b)e^x \\ &= (ax^2 + (4a + b)x + 2a + 2b)e^x \end{aligned}$$

D'où :

$$y_p''(x) - y_p(x) = xe^x \Leftrightarrow (4ax + 2a + 2b)e^x = xe^x$$

ou encore

$$4ax + 2a + 2a = x \text{ (multiplication par } e^{-x} \neq 0)$$

Et par identification des coefficients :

$$\begin{cases} 4a & = 1 \\ 2a + 2b & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a & = 1/4 \\ 2b & = -2a = -1/2 \end{cases}$$

Ce qui permet d'en déduire que $y_p : x \longmapsto \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right) e^x$ est solution particulière de l'équation différentielle proposée.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{S} = \{y = y_0 + y_p : x \longmapsto \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x}{4}\right) e^x + Be^{-x}, A, B \in \mathbb{R}\}}$

Deuxième partie

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.
Pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y.
Considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_3') \;\; y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, et x un nombre réel.

Notons : $Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons que $Y' = AY$: On a

$$Y' = AY \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y''(x) + y'(x) - 2y(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}$$

On voit alors que cette égalité est vraie, puisque y est solution de (ε_3').

$$\boxed{Y' = AY}$$

② Quelques calculs préalable :

a) Soit (S_λ) le système linéaire d'inconnues réelles x, y et z : $\begin{cases} (2-\lambda)x + y - 2z &= 0 \\ x - \lambda y &= 0 \\ y - \lambda z &= 0 \end{cases}$

i. *Montrons qu'il existe 3 valeurs de λ distinctes (nommées par la suite λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) pour lesquelles (S_λ) n'admet pas que la solution nulle :*

$$(S_\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \lambda z \\ x = \lambda y &= \lambda^2 z \\ ((2-\lambda)\lambda^2 + \lambda - 2)z &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y &= \lambda z \\ x = \lambda y &= \lambda^2 z \\ (2-\lambda)(\lambda^2 - 1)z &= 0 \end{cases}$$

Il est dès lors immédiat que (S_λ) admet au moins une solution non nulle si, et seulement si, $(2-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) \neq 0$.

Conclusion : $\boxed{(S_\lambda \text{ n'est pas un système de Cramer pour } (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_2) = (-1, 1, 2)}$

ii. *Résolvons (S_λ) pour chacune des valeurs de λ obtenues précédemment :*
Déterminons l'ensemble des solutions de (S_{-1}) :

$$(S_{-1}) \Leftrightarrow (x = z \text{ et } y = -z), \text{ donc } \boxed{\mathcal{S}_{S_{-1}} = \{(z, -z, z), z \in \mathbb{R}\}}$$

de même : $\boxed{\mathcal{S}_{S_1} = \{(z, z, z), z \in \mathbb{R}\} \text{ et } \mathcal{S}_{S_2} = \{(4z, 2z, z), z \in \mathbb{R}\}}$

iii. Soit $u_1 = (a_1, b_1, 1)$ une solution de (S_{λ_1}), $u_2 = (a_2, b_2, 1)$ une solution de (S_{λ_2}) et $u_3 = (a_3, b_3, 1)$ une solution de (S_{λ_3}). Déterminer a_1, b_1, a_2, b_2, a_3 et b_3 :
C'est immédiat au regard de la question précédente. on prendra :

$$\boxed{u_1 = (1, -, 1, 1),\ u_2 = (1, 1, 1) \text{ et } u_3 = (4, 2, 1)}$$

b) On pose $P = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Inversons la matrice P et déterminons la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$:

$$P\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +4z & = & a \\ x & -y & +2z & = & b \\ x & +y & +z & = & c \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{cccccc} x & +y & +4z & = & a & \\ 2x & & +6z & = & a+b & L_2 \leftarrow L_2+L_1 \\ & & 3z & = & a-c & L_3 \leftarrow L_1-L_3 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} y & = & \frac{1}{6}a & -\frac{1}{2}b & +\frac{1}{3}c \\ x & = & -\frac{1}{2}a & +\frac{1}{2}b & +c \\ z & = & \frac{1}{3}a & & -\frac{1}{3}c \end{array}\right.$$

$$\boxed{P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-3 & 3 & 6\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 0 & -2\end{pmatrix}}$$

Un calcul matriciel immédiat donne alors $\boxed{P^{-1}AP=D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}}$

Lu dans le rapport de jury : « *Quelques remarques habituelles sur cette question : présentations mécaniques qui laissent parfois des doutes sur la compréhension, confusion entre taille, dimension, ordre et rang d'une matrice, les colonnes de P ne sont pas toujours ordonnées, le calcul de l'inverse de P est correct dans* 50% *des cas...* »

③ Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$. *Montrons que :* $P^{-1}Y'=DP^{-1}Y$ *:*
On vient d'obtenir que $D=P^{-1}AP$ donc, en multipliant à gauche par P et à droite par P^{-1}, on a successivement :

$$PD=AP \text{ puis } PDP^{-1}=A$$

Dès lors :

$$Y'=AY=PDP^{-1}Y.$$

On obtient alors directement le résultat en multipliant cette égalité par P^{-1} à gauche.

$$\boxed{P^{-1}Y'=DP^{-1}Y}$$

Lu dans le rapport de jury : « *Trop souvent traitée en effectuant le calcul matriciel...* »

④ **Résolution de** (ε_3') **sur** $\mathbb{R}$.

a) Soit $y:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.
En notant $z=-\frac{1}{2}y''+\frac{1}{2}y'+y$, *montrons que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que :* $z'=z$, *et déduisons-en une expression de z :*

y étant une solution de (ε_3'), on en déduit qu'elle est de classe C^1. Il vient alors que z est de classe C^3 en tant que combinaison linéaire de fonctions de classe C^1. On peut alors écrire :

$$z' = -\frac{1}{2}y^{(3)} + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}\left(2y'' + y' - 2y\right) + \frac{1}{2}y'' + y' = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = z.$$

$$\boxed{z \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ de sorte que } z' = z.}$$

On en déduit qu'il existe un réel λ tel que $z(x) = \lambda e^x$, pour tout réel x.

$$\boxed{\text{Il existe un réel } \lambda \text{ tel que } z(x) = \lambda e^x, \text{ pour tout réel } x.}$$

En déduire une expression de y comme combinaison linéaire de 3 fonctions qu'on déterminera :
On vient de prouver que y vérifie l'équation différentielle $-\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y = \lambda e^x$, soit encore

$$(\dagger)\ \ -y'' + y' + 2y = 2\lambda e^x.$$

L'équation caractéristique associée à $(\dagger)$ est $-r^2 + r + 2 = 0$, qui admet pour racines -1 et 2 (après calcul du discriminant). On en déduit que la solution générale de l'équation homogène associée à $(\dagger)$ est

$$x \mapsto Ae^{-x} + Be^{2x}.$$

Quant à la solution particulière, on la cherche sous la forme $y_p(x) = \alpha e^x$ (ou plus généralement, sous la forme $y_p(x) = P(x)e^x$ si on n'a pas idée du degré de P...). Pour déterminer la valeur de α, il suffit de remarquer que l'on a

$$-y_p''(x) + y_p'(x) + 2y_p(x) = 2\alpha e^x,$$

ce qui donne $\alpha = \lambda$ après calcul des dérivées de y_p. Au final, on voit que y est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$.

$$\boxed{\text{Il existe trois réels } A, B, \lambda \text{ tels que } y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x.}$$

b) *Déterminons alors l'ensemble S_3' des solutions de (ε_3') sur $\mathbb{R}$:*
On vient de prouver que toute solution de (ε_3') est de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$, ce qui prouve :

$$S_3' \subset Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x).$$

Réciproquement, il reste à vérifier si toute fonction de la forme $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x$ est bien une solution de (ε_3'), ce qui se fait trivialement :

$$\begin{aligned} y^{(3)}(x) - 2y''(x) - y'(x) + 2y(x) &= \left(-Ae^{-x} + 8Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad -2\left(Ae^{-x} + 4Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad -\left(-Ae^{-x} + 2Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &\quad +2\left(Ae^{-x} + Be^{2x} + \lambda e^x\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où le résultat.

$$\boxed{S_3' = Vect(x \mapsto e^{-x}, x \mapsto e^{2x}, x \mapsto e^x)}$$

FIN