Devoir : Algèbre matricielle et équations différentielles (3h00)

Le devoir se compose d'un exercice et de deux problèmes.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Exercice :

Le modèle de Gompertz est un modèle de dynamique de populations qui choisit de moduler le taux de croissance *per capita* r de façon logarithmique en proposant l'équation différentielle :

$$N'(t) = r \ln\left(\frac{K}{N(t)}\right) N(t) \qquad (\mathcal{G})$$

Écrire une fonction Python `eulerExplicite(t0, tf, N0, h)` qui **trace** sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ une approximation de la solution de $(\mathcal{G})$ vérifiant $N(t_0) = N_0$ en subdivisant l'intervalle $[t_0, t_f]$ en n segments de même longueur h.

> *Rappel :* La méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu en utilisant de proche en proche l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point.
> En tout point a, $\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a)$ lorsque h est petit (positif ou négatif).

Problème 1 :

L'objectif de ce problème est de calculer de trois manières différentes la puissance n-ième d'une matrice.

On considère les matrices $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $M = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ (I_3 désignera la matrice identité).

1. Première méthode :
   a) Exprimer J^n en fonction de J pour tout entier naturel n.
   b) Déterminer deux réels a et b tels que $M = aI_3 + bJ$.
   c) Calculer M^n pour tout entier naturel n.

2. Deuxième méthode :
   a) Calculer $M^2 - \dfrac{5}{4}M + \dfrac{1}{4}I_3$.
   b) Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1}.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n, il existe deux réels uniques a_n et b_n tels que :
   $$M^n = a_n M + b_n I_3$$
   d) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n ; préciser a_0, a_1, b_0 et b_1.
   e) Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 ; En déduire a_n et b_n en fonction de n et conclure sur M^n.

3. Troisième méthode : On pose $A_\lambda = M - \lambda I_3 = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 2-4\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 2-4\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-4\lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
   a) Soit (S_λ) le système homogène $A_\lambda \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

i. Montrer qu'il existe deux valeurs de λ pour lesquelles (S_λ) n'admet pas une unique solution. On notera désormais λ_1 et λ_2 ces deux valeurs avec $\lambda_1 > \lambda_2$.

ii. Déterminer E_{λ_1} et E_{λ_2} où E_λ désigne l'ensemble des solutions de (S_λ).

b) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est constituée de 3 colonnes dont l'une est solution de E_{λ_1} et les deux autres sont solutions de E_{λ_2}. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.

c) Calculer $D = P^{-1}MP$ ainsi que D^n pour tout entier naturel n.

d) Démontrer par récurrence que $D^n = P^{-1}M^nP$ pour tout entier naturel n.

e) En déduire l'expression de M^n.

Problème 2 :

Le problème comporte deux parties qui traitent toutes de la résolution d'équations différentielles par des méthodes différentes. Ces parties sont donc totalement indépendantes.

Première partie

① L'objectif de cette question est de justifier dans certains cas, la méthode de résolution d'une équation différentielle linéaire du second ordre homogène à coefficients constants.
Soient a, b et c trois réels avec a non nul, et considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_2') \;\; ay'' + by' + cy = 0,$$

où y est une fonction d'une variable réelle à valeurs réelles.

Nous savons que la résolution sur $\mathbb{R}$ de cette équation différentielle est basée sur les solutions de l'équation numérique $(\mathcal{C})$ $ar^2 + br + c = 0$, dite *équation caractéristique associée à* (ε_2').

Nous allons retrouver la forme générale des solutions de (ε_2') en nous limitant au cas où l'équation $(\mathcal{C})$ admet deux racines réelles notées ω_1 et ω_2 non nécessairement deux à deux distinctes.

a) Rappeler les relations liant la somme et le produit des racines ω_1 et ω_2 aux coefficients a, b et c de l'équation $(\mathcal{C})$.

b) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (ε_2') sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire y est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \; ay''(x) + by'(x) + cy(x) = 0.$$

Posons : $z = y' - \omega_1 y$ $(\star)$.

i. Montrer que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $z' - \omega_2 z = 0$.

ii. En déduire une expression de z.

iii. Déduire de $(\star)$ une expression de y en montrant que, suivant les cas, y s'écrit $x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}$ ou $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$, A et B étant deux constantes réelles.

✐ *Remarque : Pour cette dernière question on sera amené à distinguer les cas où $\omega_1 = \omega_2$ et $\omega_1 \neq \omega_2$ après avoir supposé qu'une solution particulière prend la forme $y_p(x) = P(x)e^{\omega_2 x}$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.*

c) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 = \omega_2$. Montrer que, pour toutes constantes réelles A et B, les fonctions $x \mapsto (Ax + B)\, e^{\omega_1 x}$ sont solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$.
En déduire l'ensemble S_2' des solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$.

d) Dans cette question, nous supposons que : $\omega_1 \neq \omega_2$.
Montrer que pour toutes constantes réelles A et B, les fonctions $x \mapsto Ae^{\omega_1 x} + Be^{\omega_2 x}$ sont solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$. En déduire l'ensemble S_2' des solutions de (ε_2') sur $\mathbb{R}$.

e) Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $y'' - y = xe^x$.

✐ *Indication : On pourra rechercher une solution particulière sous la forme d'une fonction $y_p(x) = P(x)e^x$ où $P \in \mathbb{R}_2[X]$.*

Deuxième partie

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la résolution d'une équation différentielle homogène du troisième ordre à coefficients constants.
Pour une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^3 sur $\mathbb{R}$, $y^{(3)}$ désigne la dérivée troisième de y.
Considérons l'équation différentielle :

$$(\varepsilon_3') \;\; y^{(3)} - 2y'' - y' + 2y = 0.$$

① Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, et x un nombre réel.

Notons : $Y = \begin{pmatrix} y''(x) \\ y'(x) \\ y(x) \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} y^{(3)}(x) \\ y''(x) \\ y'(x) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrer que : $Y' = AY$.

② Quelques calculs préalable :

a) Soit (S_λ) le système linéaire d'inconnues réelles x, y et z : $\begin{cases} (2-\lambda)x + y - 2z &= 0 \\ x - \lambda y &= 0 \\ y - \lambda z &= 0 \end{cases}$

i. Montrer qu'il existe 3 valeurs de λ distinctes (nommées par la suite λ_1, λ_2 et λ_3, avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$) pour lesquelles (S_λ) n'admet pas que la solution nulle.

ii. Résoudre (S_λ) pour chacune des valeurs de λ obtenues précédemment.

iii. Soit $u_1 = (a_1, b_1, 1)$ une solution de (S_{λ_1}), $u_2 = (a_2, b_2, 1)$ une solution de (S_{λ_2}) et $u_3 = (a_3, b_3, 1)$ une solution de (S_{λ_3}).
Montrer que $a_1, b_1 = 1, -1$, $a_2, b_2 = 1, 1$ et $a_3, b_3 = 4, 2$ conviennent.

b) On pose $P = \begin{pmatrix} a_2 & a_1 & a_3 \\ b_2 & b_1 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
Inverser la matrice P et déterminer la matrice D définie par $D = P^{-1}AP$.

③ Soit y une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.
Montrer que : $P^{-1}Y' = DP^{-1}Y$.

④ **Résolution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.**

a) Soit $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (ε_3') sur $\mathbb{R}$, s'il en existe.
En notant $z = -\frac{1}{2}y'' + \frac{1}{2}y' + y$, montrer que z est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que : $z' = z$, et en déduire une expression de z.
✎ *Remarque : Nous n'avons pas de condition à l'origine et on ne cherchera pas à déterminer la constante.*
En déduire une expression de y comme combinaison linéaire de 3 fonctions qu'on déterminera.

b) Déterminer alors l'ensemble S_3' des solutions de (ε_3') sur $\mathbb{R}$.