Devoir : Equations différentielles et Calcul matriciel

La variole est une maladie virale sévère, éradiquée grâce à la vaccination en 1979. Avant cela, elle fut un problème majeur de santé publique en Europe. Au XVIIIème siècle, on lui attribuait environ 1/13 de toutes les morts, surtout infantiles car les individus atteignant l'age adulte en étaient immunisés... Les premières inoculations (infection avec une forme atténuée) datent de 1721. Elles présentent un risque important et de nombreux débats eurent lieu pour décider du bien-fondé de sa pratique et notamment de la difficulté à faire un choix entre une mort immédiate par inoculation et mourir dans un avenir indéfini en attrapant « naturellement » la maladie. Daniel Bernoulli apporta en 1760 une résolution mathématique à ce problème reconnue pour être un des premiers modèles biomathématiques.

L'idée de Daniel Bernoulli était de comparer l'espérance de vie de son époque (26 ans et 7 mois) avec un espérance de vie estimée pour une population fictive systématiquement inoculée contre la variole.

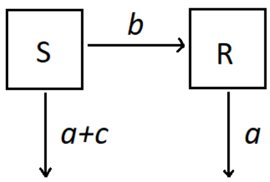
1 Modèle de Bernoulli

Dans cette partie on s'intéresse à l'échantillon statistique utilisé par Bernoulli, recensé à Breslau (Pologne) par Halley en 1693. Il avait suivi une cohorte de 1300 **bébés** nés la même année et cela durant 84 ans. Cette cohorte est considérée comme négligeable au sein d'une population stable dont on supposera que les taux d'infection par variole ne varient pas au cours de la période. On établira dans cette partie la relation entre cette cohorte et une cohorte fictive qui ne subirait pas de variole. Les fonctions suivantes du temps $t \in \mathbb{R}^+$ (toujours décompté en années) seront utilisées.

— S, R : nombres d'individus respectivement Susceptibles (c'est-à-dire n'ayant jamais été atteints par la variole) et Remis (donc immunisés) dans la cohorte observée.
— x : nombre d'individus vivants dans la cohorte observée. Il va de soit qu'initialement $x(0) = S(0)$ et $R(0) = 0$ car à la naissance, les enfants ne sont pas atteints par la maladie.
— z : nombre d'individus dans une cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais qui ne serait pas touchée par la variole.

Ces fonctions seront supposées de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$. D. Bernoulli pose le modèle suivant pour son problème :

$$\begin{cases} S'(t) &= -(a+b+c)S(t) \\ R'(t) &= bS(t) - aR(t) \\ x(t) &= R(t) + S(t) \end{cases}$$



où a est le taux de mortalité de cause indépendante de la variole par an, b est le taux d'individus susceptibles contractant la variole et guérissant par an et c est le taux d'individus susceptibles morts de la variole par an.

Les taux b et c sont des constantes et on prendra par la suite : $b = 7/64\ an^{-1}$ et $c = 1/64\ an^{-1}$.

1.1 On suppose que a est une constante qui prend pour valeur a=$1/27\ an^{-1}$

① a) Interpréter $cS(t)$ et $ax(t)$. Dans quelle unité s'expriment ces deux valeurs ?

b) Quelles hypothèses pouvez-vous faire sur $\underset{t\to+\infty}{lim} S(t)$ et de $\underset{t\to+\infty}{lim} R(t)$?

c) ***Rappel** : La méthode d'Euler permet d'approcher la solution φ d'une équation différentielle au voisinage d'un point connu, en utilisant de proche en proche l'approximation affine de la fonction au voisinage de chaque point.*

en tout point a, $\varphi(a+h) = \varphi(a) + h\varphi'(a)$ lorsque h petit (positif ou négatif)

Écrire une fonction `Euler(a, b, c, S0, R0, t0, tf, h)` qui renvoie à la fois une liste `T` égale à la subdivision régulière de l'intervalle $[t_0, t_f]$ de pas h ainsi qu'une liste `X` modélisant l'évolution du nombre d'individus sur la période $[t_0, t_f]$, en chaque point de la subdivision.

② On pose $\alpha = a + b + c$.

a) Déterminer $S(t)$ en fonction de α, x_0 et t pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. En quoi est-ce cohérent avec le modèle proposé ?

b) En déduire que R est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre qu'on déterminera.
La résoudre et montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $R(t) = \dfrac{bx_0}{b+c}(e^{-at} - e^{-\alpha t})$.

c) En déduire que $x(t) = \dfrac{x_0}{b+c}(be^{-at} + ce^{-\alpha t})$ et indiquer comment obtenir une validation graphique de ce résultat grâce à la fonction `euler()` de la question 1.c).

③ On s'intéresse à la proportion de morts au cours des ans.

a) On commence par étudier la cohorte fictive pour laquelle la variole n'existe pas (z désigne alors le nombre d'individus et $z(0) = x_0 = 1300$).

i. Donner l'équation différentielle vérifiée par z et la résoudre.

ii. En calculant $\dfrac{z(t)}{x(t)}$, montrer que $z(t) = \dfrac{8e^{t/8}}{1+7e^{t/8}}x(t)$ et vérifier que $z(t) \geq x(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

iii. En notant que la proportion d'individus morts au cours du temps est donnée par $p_m(t) = (z(0)-z(t))/z(0)$, montrer que $p_m(t) = 1 - e^{-at}$.

iv. En déduire la demi-vie de la cohorte en l'absence de variole, autrement dit $t_{1/2}$ (en années) pour lequel l'effectif de la population a été divisé par 2 (soit 650 individus).

b) Soit $y(t)$ le nombre d'individus dans une seconde cohorte fictive, initialement identique à la cohorte suivie, mais pour laquelle tous les nouveaux nés sont inoculés. On donne 1/200 la probabilité qu'un individu décède des suites de l'inoculation.

i. Justifier le choix des conditions initiales $S_0 = 0$ et $R_0 = \gamma \times x_0$ où γ est une constante à préciser.

ii. Réécrire le système différentiel proposé par D. Bernoulli et justifier que $y = \gamma z$.

iii. On note cette fois la proportion d'individus morts $q_m(t)$. Exprimer $q_m(t)$ en fonction de γ et a.

iv. En déduire la demi-vie de la cohorte inoculée de façon systématique.

c) On revient à la cohorte observée par Daniel Bernoulli.

i. Si on note $r_m(t)$ la proportion de morts au fil des ans, montrer que le temps de demi-vie de la cohorte vérifie l'équation :

$$(7 + e^{-t/8})e^{-t/27} = 4$$

ii. On pose : $f(t) = (7 + e^{-t/8})e^{-t/27}$. Justifier que le temps de demi-vie est compris entre 15 et 16 années.

d) conclure sur la position à adopter contre ou en faveur de l'inoculation.

1.2 On suppose que a est une fonction du temps

① Cette hypothèse est celle privilégiée par D. Bernoulli.

a) Expliquer pourquoi il semble légitime de ne pas considérer a comme une constante.

b) Exprimer $-x'(t)$ en fonction de $S'(t)$ et $R'(t)$ et justifier que $a(t) = -\dfrac{1}{x(t)}(x'(t) + cS(t))$.

c) Justifier que $z'(t) = \dfrac{1}{x(t)}(x'(t) + cS(t))\,z(t)$.

② a) Soit q la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $q(t) = \dfrac{x(t)}{S(t)}$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par q.

b) Résoudre cette équation différentielle et en déduire que

$$q(t) = \frac{1}{8} + \frac{7}{8}e^{t/8}$$

③ a) Soit H la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $H(t) = \ln\left(\frac{z(t)}{x(t)}\right)$. Exprimer $H'(t)$ en fonction de q. En déduire que :

$$H'(t) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{1 + 7e^{t/8}}$$

b) Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $G(t) = \dfrac{e^{t/8}}{1 + 7e^{t/8}}$. On admettra que

$$\frac{d}{dt}\ln(G) = H'(t)$$

Retrouver le résultat obtenu en I.1.3), à savoir que :

$$z(t) = \frac{8e^{t/8}}{1 + 7e^{t/8}}x(t)$$

④ Conclure que $y(t) = \gamma \times \dfrac{8e^{t/8}}{1 + 7e^{t/8}}x(t)$ et dire à partir de quelle valeur de t (en années), on a : $y(t) > x(t)$.

2 Estimation de la fonction a

Ne pas connaître la fonction a empêche de résoudre l'équation différentielle vérifiée par S. L'objectif de cette partie est d'exploiter les données utilisées par Bernoulli sur une cohorte de 1300 bébés pour estimer la fonction a.
Seul le résultat final de la question 1. ci-dessous est utile pour répondre aux questions suivantes : si besoin, on pourra donc admettre dès le début de la question 2. que la liste `lnorm` est créée. Une annexe en dernière page du sujet rappelle quelques fonction Python.

① On dispose d'un fichier texte `data.txt` composé de deux lignes, ou figurent des données annuelles (indexées à partir de 0) sous la forme suivante :
— La première ligne du fichier contient le nombre de morts par d'autres maladies que la variole.
— La seconde ligne contient le nombre de survivants à l'issue de chaque année.
— sur chaque ligne, les données sont séparées par un espace (caractère `" "`).

Par exemple, si on considère une version simplifiée avec seulement sept années, le fichier `data.txt` est constitué du texte suivant :

```
283 133 47 30 21 16 13 ...
1000 855 798 760 732 710 692 ...
```

✐ Il y a initialement 1300 bébés. L'année 0, le nombre de morts d'autres maladies que la variole a été de 283 et, à l'issue de cette année 0, 1000 enfants ont survécu (17 sont donc morts de la variole).
L'objectif de cette question est d'extraire ces informations pour créer la liste `Lnorm` qui contient, pour chaque année, le nombre de morts par d'autres maladies divisé par le nombre de survivants :
`Lnorm = [283/1000, 133/855, 47/798, ...]`

a) Écrire une fonction d'entête `extraction_ch()` qui renvoie une liste composée de deux chaînes de caractères : une correspondant à la première ligne de `data.txt` et l'autre à la seconde. *Cette fonction devra, au moins, ouvrir le fichier* `data.txt`*, le lire puis le fermer. Pour l'ouverture, la lecture et la fermeture d'un fichier, on pourra utiliser les syntaxes décrites dans l'annexe (en dernière page du sujet). Par exemple, sur le contenu simplifié ci-dessus,* `extraction_ch()` *renvoie :*

```
['283 133 47 30 21 13\n', '1000 855 798 760 732 710 692']
```

b) Compléter la fonction suivante d'entête `ch_vers_list(ch)` prenant en entrée une chaîne de caractère (de même forme que celles renvoyées par `extraction_ch`) et qui renvoie la liste de nombres correspondant : ces nombres seront de type flottant.
Par exemple, `ch_vers_list('1000 855 798 760 732 710 692')` renvoie :

```
[1000.0, 855.0, 798.0, 760.0, 732.0, 710.0, 692.0]
```

les éléments complétés sont à justifier, en particulier le rôle de la variable `sh` et on rappelle si besoin, que `float("6.5\n")` renvoie `6.5` :

```
def ch_vers_list(ch):
    L = ...
    n = len(ch)
    sh = ""
    for k in range(0, n):
        if ch[k] != "␣":
            sh = sh+ch[k]
        else:
            ...
            ...
    ...
    return L
```

c) Écrire une fonction d'entête `division(L1, L2)` prenant en entrée deux listes de nombres flottants. Cette fonction renvoie le booléen `False` si les deux listes ne sont pas de la même longueur, sinon elle renvoie la liste contenant les divisions terme à terme des éléments de `L1` par ceux de `L2` (on suppose qu'il n'y a pas de terme nul dans `L2`).
Par exemple, `division([2, 10.5, 6, 4], [2, 2, 3, 1])` renvoie :

`[1.0, 5.25, 2.0, 4.0]`

d) Proposer une suite d'instructions qui crée la liste `Lnorm` précédemment définie.

② On se propose d'estimer la fonction a représentant le taux de morts hors variole au cours du temps. On note $(\ell_t)_{t\in[\![0,83]\!]}$ les valeurs relevées sur la cohorte du nombre de morts hors variole pour les 84 années de l'étude, stockées dans la liste `Lnorm`. Le graphique des valeurs numériques de ℓ_t pour les 24 premières années est donné en figure 1. On admettra que le comportement en temps long reste stable. On définit la fonction $M : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ par :

$$\forall(\lambda,\mu,\gamma)\in\mathbb{R}^3,\quad M(\lambda,\mu,\gamma)=\sum_{t=0}^{83}\left(\ell_t-\lambda\mathrm{e}^{-\mu t}-\gamma\right)^2$$

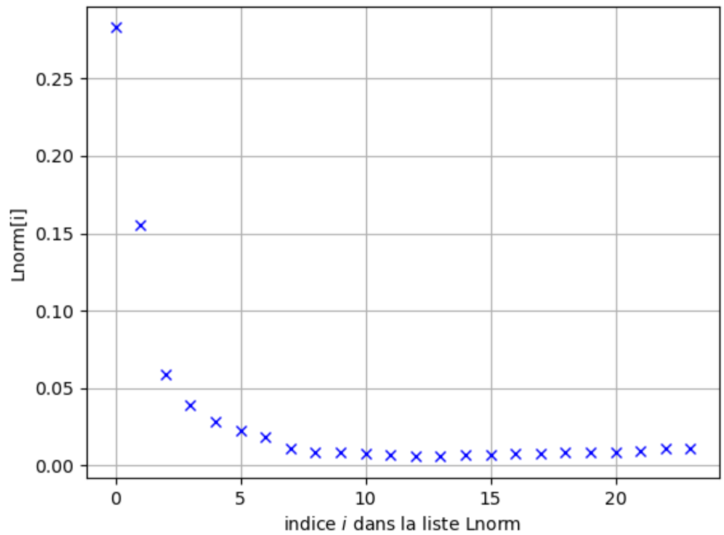


FIGURE 1 – Tracé des valeurs de ℓ_i

a) Un premier choix, non retenu pour la suite, aurait été de considérer, à la place de M, la fonction $\widetilde{M}$ suivante :

$$\forall(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2,\quad \widetilde{M}(\alpha,\beta)=\sum_{t=0}^{83}\left(\ell_t-\alpha t-\beta\right)^2.$$

i. Expliquer ce que l'on aurait cherché à faire en minimisant $\widetilde{M}$ par rapport à α et β.

ii. Expliquer ce que l'on cherche à faire en minimisant M par rapport à λ, μ et γ ; on pourra faire un dessin. Pourquoi choisir $t \mapsto \lambda e^{-\mu t} + \gamma$ plutôt qu'une fonction polynomiale ?

b) À l'aide des données représentées sur la figure 1, indiquer avec justification quelle valeur numérique approximative peut être choisie pour γ. Faire de même pour λ. On note ces choix γ_0 et λ_0, considère que $\gamma = \gamma_0$ et $\lambda = \lambda_0$: seule μ reste à déterminer.

c) À quoi correspond la fonction suivante ? (La fonction Python `exp` est la fonction exponentielle.)

```python
def M_mu(mu):
    lamb = lambda0
    gam = gamma0
    s = 0
    for k in range(len(Lnorm)):
        s += (Lnorm[k]-lamb*exp(-mu*k)-gam)**2
    return s
```

d) Le tracé de la fonction `M_mu` est donné en figure 2. Expliquer si ce tracé est utile pour déterminer la valeur de μ cherchée. Si oui, proposer une valeur, notée μ_0.

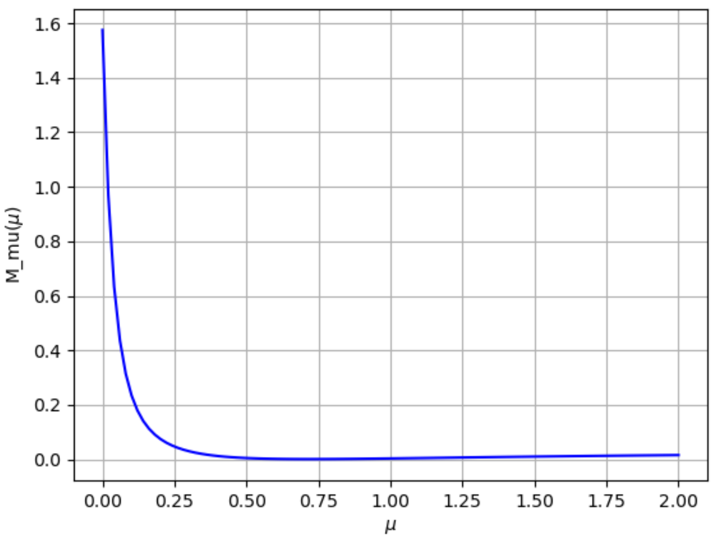


Figure 2 – Tracé de la fonction `M_mu`

③ Dans cette question, on dispose d'une fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur un intervalle $[A; B]$ de $\mathbb{R}$ qui vérifie l'hypothèse suivante : il existe $x^* \in [A; B]$ tel que f est strictement décroissante sur $[A; x^*]$ et strictement croissante sur $[x^*; B]$; ainsi, f admet un minimum en x^*. L'objectif de la question est de déterminer x^* de façon approchée.

L'algorithme utilisé consiste à partir de $g_0 = A$ et $d_0 = B$ puis à construire une suite d'intervalles $[g_k, d_k]$ qui sont de plus en plus petits et qui contiennent x^* (ainsi, lorsqu'on aura atteint un intervalle « suffisamment petit », on aura localisé x^* avec une « précision suffisante »). Pour passer de $[g_k; d_k]$ à $[g_{k+1}; d_{k+1}]$, on utilise le raisonnement suivant :

— on choisit deux nombres x^g et x^d qui vérifient $g_k < x^g < x^d < d_k$;

— si $f(x^g) < f\left(x^d\right)$ alors x^* se situe à gauche de x^d donc on pose $g_{k+1} = g_k$ et $d_{k+1} = x^d$;

— sinon si $f(x^g) > f\left(x^d\right)$ alors x^* se situe à droite de x^g donc on pose $g_{k+1} = x^g$ et $d_{k+1} = d_k$;

— sinon, c'est que $f(x^g) = f\left(x^d\right)$ donc x^* se situe dans $\left[x^g; x^d\right]$ et on pose $g_{k+1} = x^g$ et $d_{k+1} = x^d$.

On calcule cette suite d'intervalles et on s'arrête dès que la taille de l'intervalle $[g_k; d_k]$ est inférieure ou égale à ε (où $\varepsilon > 0$ est une valeur fixée) ; on renvoie alors, parmi les trois points g_k, d_k et m_k (où m_k est le milieu entre g_k et d_k), celui en lequel f est la plus petite.

a) On dispose de la fonction suivante, où f est une fonction et x, y deux réels.

```
def argmin2(f, x, y):
    if f(x) <= f(y):
        return x
    else:
        return y
```

b) Écrire une fonction `argmin3(f, x, y, z)` qui utilise `argmin2()` et renvoie parmi les trois valeurs x, y et z, celle en laquelle f est minimale.

c) Écrire une fonction d'entête `minimum(f, A, B, eps)` qui programme l'algorithme déterminant x^*. Elle suivra la structure suivante (en utilisant autant de lignes que nécessaire dans le corps de boucle) ; par ailleurs, le choix de x^g et de x^d sera tel qu'ils découpent $[g_k; d_k]$ en trois parties égales.
✐ *On prendra soin d'expliquer les choix effectués pour compléter la fonction.*

```
def minimum(f, A, B, eps):
    g = A
    d = B
    while ...
        xg = ...
        xd = ...
        # Calcul de $x^g$ et $x^d$
            ...
                            ...
    return ...
```

④ On revient dans cette question à la problématique de la question 2 et on considère toujours γ et λ fixés aux valeurs γ_0 et λ_0 précédemment trouvées. Cependant, μ_0 est à déterminer à l'aide de la fonction minimum écrite en question 3, plutôt que par lecture graphique.

a) Écrire une fonction d'entête `test_croissant(L)` prenant en entrée une liste de nombres et qui renvoie un booléen indiquant si les valeurs de L sont triées par ordre croissant.
✐ *Cette fonction devra parcourir* L *une seule fois ; en particulier, elle ne devra pas réaliser un quelconque tri.*

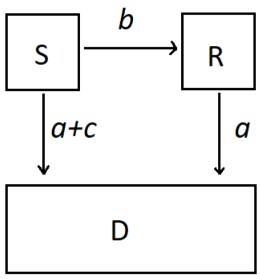
b) À l'aide de `test_croissant`, proposer un raisonnement (sans écrire de code) pour tester si la fonction `M_mu` est bien croissante sur l'intervalle $[0,8; 3]$.

c) Proposer une instruction pour trouver la valeur μ_0 cherchée.

d) On trouve $\mu_0 \approx 0,7151$: commenter et conclure sur l'estimation de la fonction a.
Que penser de l'hypothèse « a constant » du premier modèle ?

3 Modèle individu-centre

Contrairement à l'étude de Bernoulli on ne s'intéresse plus dans cette partie à toute la cohorte mais à un seul individu vivant dans la cohorte dont l'état (susceptible, remis ou mort) est modélisé par une variable aléatoire. Dans ce cas le modèle étudié peut être résumé par le schéma suivant dans lequel une classe d'état D a été rajoutée, correspondant à l'état mort :



Soit un individu donné dans la population. Le temps (en années) sera désormais noté n et ne prendra que des valeurs entières positives. On note X_n la variable aléatoire correspondant à l'état de l'individu au temps $n \in \mathbb{N}$ et on conviendra que $(X_n = 0)$, $(X_n = 1)$ et $(X_n = 2)$ sont respectivement les événements « l'individu au temps n est Susceptible »,« l'individu au temps n est Remi » et « l'individu au temps n est Mort »(✐ On a donc $X_n(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ Les paramètres a, b et c représentent ici des probabilités conditionnelles et sont ici supposées constantes au cours du temps (avec $a \neq 0$. Ainsi par exemple, quel que soit $n \in \mathbb{N}$, un individu susceptible au temps n aura une probabilité b d'être remis au temps $n + 1$.

Pour tout instant $n \in \mathbb{N}$ on définit le vecteur Z_n des probabilités suivant :

$$Z_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(X_n = 0) \\ \mathbb{P}(X_n = 1) \\ \mathbb{P}(X_n = 2) \end{pmatrix}$$

① On suppose qu'au temps 0 l'individu est susceptible. Donner alors les matrices colonnes Z_0 et Z_1.

② On définit une matrice Q :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 - (a + b + c) & 0 & 0 \\ b & 1 - a & 0 \\ a + c & a & 1 \end{pmatrix}$$

a) Montrer à l'aide de la formule des probabilités totales que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $Z_{n+1} = Q \times Z_n$

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, Z_n = Q^n Z_0$ où Q^n désigne la puissance n de la matrice Q :

$$Q^n = \underbrace{Q \times \cdots \times Q}_{n \text{ fois}}$$

c) Soit le système homogène (S_λ) : $(Q - \lambda I_3)X = 0$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Justifier qu'il existe trois valeurs réelles distinctes λ_1, λ_2 et $\lambda_3 = 1$ pour lesquelles le système (S_λ) admet au moins une solution non nulle. Montrer que $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1 = \lambda_3$.

d) Résoudre le système (S_λ) pour chacune des trois valeurs de λ obtenues.

e) Exprimer $P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}$ où $u_k = (\alpha_k, \beta_k, \gamma_k)$ est une solution non nulle de (S_{λ_k}). Montrer que P est inversible et calculer P^{-1} ;

f) Calculer $D = P^{-1}QP$.

g) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Z_n = P \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} Z_0$$

Dans la suite on admettra que :

$$Z_n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n \\ \dfrac{-b\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c} \\ 1 - \dfrac{c\lambda_1^n + b\lambda_2^n}{b+c} \end{pmatrix}$$

h) Calculer les limites $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 0)$, $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(X_n = 2)$. Interpréter.

③ a) Soit A_n l'évènement « l'individu vit exactement n années ». Montrer que :

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{c(a+b+c)}{b+c}\lambda_1^n + \frac{ab}{b+c}\lambda_2^n$$

Dans la suite on admettra que le premier terme est négligeable devant le deuxième et on prendra :

$$\mathbf{P}(A_n) = \frac{ab}{b+c}\lambda_2^n$$

b) Soit $\rho \in]0,1[$ et soit $\Sigma = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^n$. Justifier que Σ est bien définie et montrer que :

$$\Sigma = \frac{\rho}{(\rho-1)^2}$$

c) Montrer que l'espérance de vie d'un individu à la naissance est égale à :

$$\mathcal{E} = \frac{b(1-a)}{a(b+c)}$$

On pourra voir l'espérance de vie comme l'espérance de la variable aléatoire

$$T = \max\{n \in \mathbb{N}, X_n \neq 2\}.$$

✐ On rappelle que $\mathbb{E}(T)$ existe si $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n\mathbb{P}(T=n)$ converge absolument et que, si c'est le cas, $\mathbb{E}(T) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(T_n)$

d) *Application numérique* : dans le cas de la variole, calculer l'espérance de vie. On prendra $a = 2/64$, $b = 7/64$ et $c = 1/64$. Comparer avec l'espérance de vie réelle de 26 ans et 7 mois. Le choix de prendre a constant vous parait-il justifié ?

Annexe - Rappels de syntaxes Python pour la partie 2

— `f = open("monfichier.txt", "r")` ouvre le document intitulé `monfichier.txt` (en mode lecture) ; le fichier est alors désigné par la variable `f`.
— `f.read()` lit l'intégralité du contenu du fichier `f` et le renvoie sous forme d'une chaine de caractères.
— `f.readline()` lit la première ligne du fichier `f` et la renvoie sous forme d'une chaine de caractères. Ré-exécuter `f.readline( )` lit alors la deuxième ligne ; et ainsi de suite.
— `f.close ()` ferme le fichier `f`.
— Le caractère « \n » (de longueur 1) désigne le passage à la ligne.

FIN DU SUJET