

---

## Devoir maison 3 : Planche 2 - TD6 Polynômes

Soit la fonction  $\Phi$  définie sur  $\mathbb{R}[X]$  par  $\Phi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$ .

- ① On modélise un polynôme par la liste de ses coefficients donnée par ordre croissant. Par exemple le polynôme  $X + 2X^3 + X^4$  va être modélisé par  $[0, 1, 0, 2, 1]$ .
- Écrire une fonction prenant en argument une liste de ce type représentant un polynôme  $P$  et retournant une liste modélisant le polynôme dérivé  $P'$ .
  - Écrire une fonction prenant en argument une liste représentant un polynôme  $P$  et retournant une liste modélisant le polynôme  $XP$ .
  - En déduire une fonction retournant une liste représentant  $\Phi(P)$  à partir d'une liste représentant  $P$ .
- ② On donne  $P = 2X^2 + 4X + 2$ . Calculer  $\Phi(P)$  et le factoriser.
- ③ Soit  $P \in \mathbb{R}[X]$ , de degré  $n$ . Montrer que  $\Phi(P)$  est de degré inférieur ou égal à  $n + 1$ .  
Pour quel degré a-t-on une inégalité stricte ?
- ④ On considère l'équation  $(E) : \Phi(P) = 9P$ .
- Le polynôme nul est-il solution ?
  - On cherche à déterminer tous les polynômes non nuls solution de  $(E)$ .  
Montrer que ceux-ci sont de degré 9.  
Montrer qu'ils sont solution d'une équation différentielle du premier ordre et en déduire qu'on peut les mettre sous la forme :  $\lambda(X + 1)^9$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .