7 Systèmes et calcul matriciel.

Systèmes linéaires équivalents. Réduction d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss via les opérations élémentaires, à savoir : multiplier une équation par un scalaire non nul, ajouter à une équation une combinaison linéaire des autre.
Rang d'un système, c'est-à-dire son nombre de pivots après réduction.
Opérations sur les matrices : somme, produit par un scalaire, produit matriciel. Formule du binôme de Newton dans le cas de deux matrices qui commutent.
Transposée d'une matrices. Écriture matriciel d'un système. Rang d'une matrice.
Matrices carrées inversibles. Expression dans le cas particulier des matrices 2×2.

1 Révisions « Résolution de systèmes »

Exercice 1 ✶ :

Résoudre les systèmes suivants, a étant réel.

$$1)\ \begin{cases} 5x + 2y + 3z & = -2 \\ 2x - 2y + 5z & = 0 \\ 3x + 4y + 2z & = -10 \end{cases} ;\quad 2)\ \begin{cases} x + y + z + t & = 2 \\ 2x + y + z + t & = 1 \\ x + 2y + 2z & = 2 \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x + y + z & = a \\ x + jy + j^2 z & = b \\ x + j^2 y + jz & = c \end{cases} ;\quad 4)\ \begin{cases} ax + \quad + z & = 1 \\ x + ay + z & = 1 \\ x + y + az & = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 ❤ :

Déterminer dans chaque cas les scalaires $\lambda \in \mathbb{C}$ pour lesquels l'ensemble des solutions des systèmes linéaires suivants n'est pas réduit à $\{(0,0,0)\}$. Montrer que chaque système peut s'exprimer sous la forme $(A - \lambda I)X = 0$ où $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et I désigne la matrice identité.
Interpréter ensuite géométriquement les solutions en terme d'intersections de plans.

$$(S_1)\ \begin{cases} (3-\lambda)x - y + z & = 0 \\ 7x - (5+\lambda)y + z & = 0 \\ 6x - 6y + (2-\lambda)z & = 0 \end{cases} ;\quad (S_2)\ \begin{cases} (3-\lambda)x - 2y + 2z & = 0 \\ 3x - (2+\lambda)y + 3z & = 0 \\ 2x - 2y + (3-\lambda)z & = 0 \end{cases} ;\quad (S_3)\ \begin{cases} (2-\lambda)x + y - 7z & = 0 \\ 2x + (3-\lambda)y - 8z & = 0 \\ 2x + 2y - (7+\lambda)z & = 0 \end{cases}$$

2 Révisions « Calcul matriciel »

En complément du Notebook td0BCPST2e-revisionsAlgLin.ipynb

Exercice 3 ✶ : Puissances n-ièmes

Pour tout entier naturel n non nul, calculer les puissances n-ièmes des matrices suivantes ($a, b \in \mathbb{R}$) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{pmatrix} ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 ✶✶ : Puissances n-ièmes et suites récurrentes

Les suites (u_n), (v_n) et (w_n) sont définies de manière récurrente par : (S) $\begin{cases} u_{n+1} = v_n/4 \\ v_{n+1} = u_n + v_n/2 + w_n \\ w_{n+1} = v_n/4 \end{cases}$, $\forall n \geq 0$, $u_0 = 1$, $v_1 = 1 = w_1$

① Montrer le système (S) peut s'écrire sous la forme $X_{n+1} = A \cdot X_n$ où $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 0 \\ 1 & 1/2 & 1 \\ 0 & 1/4 & 0 \end{pmatrix}$.

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = A^n \cdot X_0$

② Calcul de A^n :

a. Exprimer A^3 en fonction de A^2 et A.
b. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2 / A^n = a_n A^2 + b_n A$.
c. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+2} = \frac{1}{2} a_{n+1} + \frac{1}{2} a_n$.
d. En déduire une expression de a_n puis de b_n en fonction de n. Conclure sur une expression de A^n.

③ Donner la forme explicite de u_n, v_n et w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 ✶ : Matrices inversibles

Dire si ces matrices sont inversibles et, si oui, calculer leur inverse.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} ; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} ; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 5 ✶ : Matrices inversibles

① Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

② Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$. Calculer A^3. En déduire que A n'est pas inversible.

③ Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - 4A^2 + A + 6I_3$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.

Exercice 6 ✶✶ : Matrices diagonalisables

Soient $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1/2 \\ -2 & 2 & 1/2 \\ -2 & 1 & 3/2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

① **a.** Montrer que la matrice P est inversible et calculer son inverse P^{-1}.

b. Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$; Que constate-t-on ?

c. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $A^n = PD^nP^{-1}$

② On dit qu'une suite de matrice $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ converge si chacune des suites des coefficients de M_n, pour une ligne et une colonne fixées, est convergente. Dans ce cas on dit que la matrice des limites est la limite des suites $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a. Donner une forme explicite de A^n.

b. Dire si la suite (A_n) converge. Si oui, donner sa limite.