CORRECTION TD 07 – POLYNÔMES.

EXERCICE 11 :

① Expression de $\tan(7\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$:

On utilise la formule de Moivre : $e^{i7\theta} = (e^{i\theta})^7 = (\cos\theta + i\sin\theta)^7$

Alors, d'après le binôme de Newton :

$$\tan(7\theta) = \frac{\sin(7\theta)}{\cos(7\theta)} = \frac{\operatorname{Im}(e^{i7\theta})}{\operatorname{Re}(e^{i7\theta})}$$

$$= \frac{7\cos^6(\theta)\sin(\theta) - 35\cos^4\theta\sin^3\theta + 21\cos^2(\theta)\sin^5(\theta) - \sin^7(\theta)}{\cos^7(\theta) - 21\cos^5\theta\sin^2\theta + 35\cos^3(\theta)\sin^4(\theta) - 7\cos(\theta)\sin^6(\theta)}$$

En divisant en haut et en bas par $\cos^7(\theta)$ on obtient :

$$\boxed{\tan(7\theta) = \frac{7\tan(\theta) - 35\tan^3(\theta) + 21\tan^5(\theta) - \tan^7(\theta)}{1 - 21\tan^2(\theta) + 35\tan^4(\theta) - 7\tan^6(\theta)}}$$

② Soit $P(X) = X^3 - 21X^2 + 35X - 7 \in \mathbb{R}_3[X]$

on a d'après la question ① :

$$\tan(7\theta) = \frac{-\tan(\theta).P(\tan^2\theta)}{\tan^6(\theta).P(1/\tan^2(\theta))} = 0 \iff \tan(\theta) = 0 \text{ ou } P(\tan^2\theta) = 0.$$

③ $\theta_1 = \frac{\pi}{7}$ vérifie $\tan(\theta_1) \neq 0$ et $\tan(7.\frac{\pi}{7}) = \tan\pi = 0$.

D'où, d'après ②, on a : $P(\tan^2\theta_1) = P(\tan^2\frac{\pi}{7}) = 0$.

De même pour $\theta_2 = \frac{2\pi}{7}$ et $\theta_3 = \frac{3\pi}{7}$, $\tan(7\theta_2) = 0 = \tan(7\theta_3) = 0$

Donc : $P(\tan^2\frac{2\pi}{7}) = 0 = P(\tan^2\frac{3\pi}{7})$

P ne pouvant admettre plus de 3 racine, on conclut :

$\boxed{\text{Les racines de } P \text{ sont les réels } \alpha_k = \tan^2\frac{k\pi}{7},\ 1 \leq k \leq 3}$

④ $\frac{1}{\cos^4\theta} = \left(\frac{1}{\cos^2\theta}\right)^2 = (1 + \tan^2\theta)^2 = 1 + 2\tan^2\theta + \tan^4\theta$

Donc $S = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\cos^4(\frac{k\pi}{7})} = 3 + 2\underbrace{\sum_{k=1}^{3}\tan^2\left(\frac{k\pi}{7}\right)}_{S_1} + \underbrace{\sum_{k=1}^{3}\tan^4\left(\frac{k\pi}{7}\right)}_{S_2}$

$S_1 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i = 21$ et $S_2 = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i^2 = (\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 - 2(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)$

$= 21^2 - 2\times 35$

Conclusion : $\boxed{S = 3 + 2\times 21 + 21^2 - 2\times 35 = 416}$