6 Polynômes

Rappels (BCPST1 - Trigonométrie et nombres complexes)

- ***Nombres complexes :*** Écriture algébrique et trigonométrique d'un nombre complexe. Représentation géométrique. Propriétés des conjugués, modules et arguments d'un nombre complexe. Linéarisation de $\cos^p(x)\sin^q(x)$.
  Résolution des équations du second degré à coefficients réels. Somme et produit des solutions. Résolution de l'équation $x^2 = a$ avec $a \in \mathbb{C}$.
- ***trigonométrie :*** Définition, périodicité et symétrie des fonctions cos, sin et tan.
  Formules de trigonométrie $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$, $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$.
  Résolution d'équations trigonométrique du type : $\cos(x) = c$, $\sin(x) = s$ et $\tan(x) = t$.
  Notations arccos, arcsin et arctan.
  Transformation : $a\cos(\theta) + b\sin(\theta) = R\cos(\theta + \phi)$.

Exercice 1 ✶ : Équation polynomiale

En pensant aux propriétés du degré d'un polynôme, trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

$$P' + XP = X^2 + 1$$

Exercice 2 ✶ : Racines d'un polynôme

Montrer que le polynôme $P = X^5 - 5X^4 + 3$ de $\mathbb{R}[X]$ admet exactement trois racines réelles notées a, b et c telles que

$$-1 < a < 0 < b < 1 < 4 < c < 5$$

Exercice 3 ✶ :

Soit $A_n = (X-1)^{n+2} + X^{2n+1}$ et $B = X^2 - X + 1$ deux polynômes à coefficients réels.
On dira que B divise A_n si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $A_n = B \cdot Q$.

① Montrer que l'équation $z^3 = 1$ admet trois racines dans $\mathbb{C}$ qu'on nommera respectivement z_0, z_1 et z_2 (on parlera par la suite de « racines cubiques de l'unité »).

  a. Donner leur expression algébrique et trigonométrique et les situer sur le cercle trigonométrique.
  b. Que vaut $z_0 + z_1 + z_2$?
  c. Déterminer pour $k \in [\![0, 2]\!]$: z_k^{3n}, z_k^{3n+1} et z_k^{3n+2} pour tout n entier naturel.

② Déterminer les racines de B. Les situer sur le cercle trigonométrique et les exprimer en fonction des racines cubiques de l'unité.

③ Montrer que pour tout n entier naturel *les* racines de B sont *des* racines de A_n. En déduire que B divise A_n quel que soit l'entier naturel n.

Exercice 4 ✶ :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et les polynômes :

$$P = 1 + X + \frac{X(X+1)}{2!} + \cdots \frac{X(X+1)\cdots(X+n-1)}{n!}\,;\; Q = \frac{(X+n)(X+n-1)(X+n-2)\cdots(X+1)}{n!}$$

① Calculer les degrés de P et Q ainsi que $P(0)$ et $Q(0)$.

② Montrer que, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a : $Q(i) = \binom{n+i}{i}$.

③ Montrer que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $P(i) = \sum_{k=0}^{n} \binom{i+k-1}{k}$.

④ En déduire que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, on a $P(i) = Q(i)$.

⑤ En déduire que $P = Q$.

Exercice 5 ✶✶ :

① Exprimer $\tan(7\theta)$ en fonction de $\tan(\theta)$

② Soit $P = X^3 - 21X^2 + 35X - 7 \in \mathbb{R}_3[X]$. Exprimer $\tan(7\theta)$ en fonction de P, $\tan(\theta)$ et $\frac{1}{\tan(\theta)}$.

③ En déduire que les racines de P sont les réels $\alpha_k = \tan^2 \frac{k\pi}{7}$ où $1 \leq k \leq 3$.

④ Rappeler le lien entre racines et coefficients d'un polynôme de degré 3 à coefficients réels. En déduire la valeur de

$$S = \frac{1}{\cos^4(\pi/7)} + \frac{1}{\cos^4(2\pi/7)} + \frac{1}{\cos^4(3\pi/7)} = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{\cos^4(k\pi/7)}$$

Exercice 6 ✶✶ :

En pensant à nouveau au lien entre racines et coefficients d'un polynôme à coefficients réels de degré 3, résoudre le système :

$$\begin{cases} x + y + z & = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 & = 9 \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} & = 1 \end{cases}$$

Exercice 7 ✶ :

Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[C]$:

$$P_1 = X^5 - X^4 + X - 1\,;\; P_2 = X^3 - 6X^2 + 11X - 6\,;\; P_3 = X^4 + 1\,;\; P_4 = X^6 + X^3 - 2$$

Planches d'oraux

Planche 1 : oral Agro 2017

On considère la famille de polynômes définie par :

$$T_0 = 1,\ T_1 = X,\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$$

① **a.** Donner l'expression de T_2 et T_3.
b. Pour tout entier naturel n, donner le degré de T_n ainsi que l'expression du coefficient devant le terme de plus haut degré.
c. Pour tout entier naturel n, donner l'expression de chaque coefficient de T_{n+2} en fonction des coefficients de T_{n+1} et de T_n.

② **a.** On décide de coder un polynôme sous forme d'une liste : celle des coefficients de ce polynôme classés dans l'ordre des degrés croissants. Ecrire une fonction qui retourne le degré d'un polynôme.
b. Écrire une fonction d'en-tête `def etape(L,M)` qui donne en sortie la liste associée au polynôme $T = 2X * M - L$ où L et M sont des listes définies comme en 2.a).
c. Écrire une fonction d'en-tête `tchebychev(n)` qui, à partir d'un entier n, donne en sortie la liste associée au polynôme T_n.
d. Écrire une fonction d'en-tête `def evalue(P,x)` qui, étant donné un polynôme P (défini sous forme d'une liste) et un réel x, évalue ce polynôme en x c'est-à-dire donne une valeur pour $P(x)$.
Remarque : On essayera de concevoir un algorithme utilisant le moins d'opérations algébriques possibles.
e. Écrire une fonction d'en-tête `TraceTchebychev(n)` qui à partir d'un entier n, trace la représentation graphique du polynôme T_n sur l'intervalle $[-1; 1]$. Quelles observations peut-on faire ?

③ **a.** Pour tout couple de réels $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, prouver l'égalité :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a+b) + \cos(a-b))$$

b. Pour tout réel a et tout entier naturel n, prouver que :

$$T_n(\cos(a)) = \cos(na)$$

c. Pour tout entier naturel n, montrer que le polynôme T_n admet n racines distinctes, toutes éléments de $[-1, 1]$.

Planche 2 : oral Agro 2018

Soit la fonction Φ définie sur $\mathbb{R}[X]$ par $\Phi(P) = 9XP - (X^2 - 1)P'$.

① On modélise un polynôme par la liste de ses coefficients donnée par ordre croissant. Par exemple le polynôme $X + 2X^3 + X^4$ va être modélisé par `[0,1,0,2,1]`.

- **a.** Écrire une fonction prenant en argument une liste de ce type représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme dérivé P'.
- **b.** Écrire une fonction prenant en argument une liste représentant un polynôme P et retournant une liste modélisant le polynôme XP.
- **c.** En déduire une fonction retournant une liste représentant $\Phi(P)$ à partir d'une liste représentant P.

② On donne $P = 2X^2 + 4X + 2$. Calculer $\Phi(P)$ et le factoriser.

③ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, de degré n. Montrer que $\Phi(P)$ est de degré inférieur ou égal à $n + 1$.
Pour quel degré a-t-on une inégalité stricte ?

④ On considère l'équation (E) : $\Phi(P) = 9P$.

- **a.** Le polynôme nul est-il solution ?
- **b.** On cherche à déterminer tous les polynômes non nuls solution de (E).
  Montrer que ceux-ci sont de degré 9.
  Montrer qu'ils sont solution d'une équation différentielle du premier ordre et en déduire qu'on peut les mettre sous la forme : $\lambda(X + 1)^9$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.