6 Nombres complexes

Exercice 1 : Déterminer la forme complexe d'un nombre complexe

$$z_1 = \sqrt{3}i\,;\ z_2 = -2e^{2i\pi/3}\,;\ z_3 = 5 - 5i\,;\ z_4 = -5 + 5i\sqrt{3}$$

Exercice 2 : Utilisation de la forme complexe pour calculer une puissance

Déterminer la forme exponentielle de $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$

Exercice 3 ✶ : Utilisation de l'angle « moitié »

① Soit $\theta \in [0, \pi[$. Déterminer le module et l'argument de $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

② Application 1 : Soit z nombre complexe de module 1 différent de -1. Simplifier $Z = e^{i\pi/2}\dfrac{z-1}{z+1}$

③ Application 2 ; Calculer $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice 4 ✶✶ : racine carrée d'un nombre complexe

Déterminer les nombres complexes z vérifiant :

$$z^2 = -1\,;\ z^2 = 2i\,;\ z^2 = 3 - 4i$$

Exercice 5 ✶✶ : racine cubique de l'unité

① Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = 1$.

② En déduire une résolution de l'équation $z^3 = -i$

Exercice 6 ✶ : linéarisation

Linéariser $A = \cos^4(\theta) - \sin^4(\theta)$

Exercice 7 ✶ : Résolution d'une équation du second degré

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions de l'équation suivante d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$$

Plus généralement, résoudre :

$$x^2 - 2x + 2 = 0\,;\ ix^2 + 2ix + 2i = 0\,;\ 3x^2 - 6x + 15 = 0$$