Devoir : Probabilités et séries numériques (3h00)

Le devoir se compose de trois problèmes.
Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
L'usage de la calculatrice ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

Problème 1 :

Une urne contient initialement 2 boules blanches et 2 boules noires.
Soit c un entier naturel. On effectue une série de tirages en suivant le protocole suivant :

- On tire au hasard une première boule. Si elle est blanche, on arrête là. Si elle est noire, on remet la boule noire dans l'urne. Puis on rajoute encore c boules noires dans l'urne.
- On recommence ainsi jusqu'à obtenir une boule blanche (si on finit par obtenir une boule blanche...) ou indéfiniment si on n'obtient jamais de boule blanche.

Pour tout entier naturel n non nul, on note E_n l'événement : « Les n premiers tirages ont eu lieu et n'ont donné que des boules noires ».
Soit X la variable aléatoire égale au rang du tirage auquel on a obtenu une boule blanche si on finit par obtenir une boule blanche et égale à 0 sinon.

① On suppose que $c = 0$.

a) Déterminer $X(\Omega)$ et montrer que $\mathbb{P}(X = n) = \dfrac{1}{2^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X = n)$ et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n)$.
En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

c) On précise que l'espérance d'une variable aléatoire discrète X existe si la série $\sum n\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument et que, si c'est le cas, $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}(X = n)$.
Justifier l'existence de $\mathbb{E}(X)$ et donner sa valeur.

② Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$ en fonction de c quelconque.

③ a) Écrire une fonction `simulExp(c, s)` qui prend en argument la valeur de c et un entier naturel s et qui doit modéliser l'expérience ci-dessus, avec un nombre maximal de tirages égale à s, étant entendu qu'au delà de ce nombre de tirage, le nombre de boules noires est tel qu'il devient improbable de pouvoir tirer une boule blanche (le programme dans ce cas ne s'arrêterait pas...).
Cette fonction devra renvoyer le rang d'apparition d'une boule blanche si une boule blanche a été obtenue et 0 sinon.
✐ On prendra soin de justifier chacun des choix qu'on a été amené à faire.

b) Écrire une fonction `estimEsp(c, s , m)` qui utilise `simulExp()` et qui renvoie, sans avoir à utiliser la bibliothèque `numpy`, une estimation de l'espérance de X en simulant un grand nombre m de fois l'expérience.

A titre d'exemple, on obtient :

```
estimEsp(0,10,1000) = 1.956 ; estimEsp(0,50,1000) = 2.019 ;
estimEsp(0,100,1000) = 2.011

estimEsp(1,10,1000) = 2.174 ; estimEsp(1,50,1000) = 2.575 ;
estimEsp(1,100,1000) = 2.880 ; estimEsp(1,200,10000) = 3.0843

estimEsp(2,10,1000) = 2.09 ; estimEsp(2,50,1000) = 3.533 ;
estimEsp(2,100,1000) = 4.209 ; estimEsp(2,500,10000) = 5.4888
```

Commentez ces résultats. Sont-ils conforment à votre réponse à la question 1. ? Quelle hypothèse pouvez-vous faire sur $\mathbb{E}(X)$ pour $c = 1$ et $c = 2$?

c) Montrer comment il est possible d'utiliser `simulExp()` pour écrire une fonction `estimProbZero(c,s,m)` simulant un grand nombre m de fois l'expérience et retournant une estimation de $\mathbb{P}(X = 0)$.

Voici quelques exemples d'exécution de cette fonction : `estimProbZero(1,100,1000) = 0.001` ; `estimProbZero(2,100,1000) = 0.011` ; `estimProbZero(5,100,1000) = 0.073`. Commentez ces résultats.

④ Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(E_n) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \frac{2+kc}{4+kc}$.

⑤ On suppose dans cette question que $c = 1$.

a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul.

b) Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(E_n)$. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

c) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}(X = n) = \dfrac{12}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

En pensant à des télescopages, vérifier que $\sum \mathbb{P}(X = n)$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) = 1$.

d) On souhaite montrer l'existence et calculer la valeur de $\mathbb{E}(X)$.

i. On rappelle au préalable le théorème « de transfert » qui assure que, si X est une variable aléatoire discrète infinie et $Y = g(X)$ est une variable aléatoire discrète fonction de X, alors $\mathbb{E}(Y)$ existe si la série $\sum g(n)\mathbb{P}(X = n)$ converge absolument. Alors $\mathbb{E}(Y) = \displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}(X = n)$.

Utiliser ce théorème pour montrer que $\mathbb{E}(X + 3)$ existe et calculer sa valeur.

ii. En déduire $\mathbb{E}(X)$ que vous confronterez au résultat de l'estimation obtenue en 3.c).

⑥ On suppose dans cette question que $c = 2$.

a) Calculer $\mathbb{P}(E_n)$ pour tout entier naturel non nul. En déduire la valeur de $\mathbb{P}(X = 0)$.

b) Donner la loi de X (à savoir $X(\Omega)$ et $\mathbb{P}(X = n)$ pour tout $n \in X(\Omega)$).

c) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? Confrontez votre réponse au résultat de l'estimation obtenue en 3.c).

⑦ On souhaite généraliser à tout c entier naturel non nul, les valeurs de $\mathbb{P}(X = 0)$ obtenues précédemment.

a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\ln(\mathbb{P}(E_n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{2}{2+kc}\right)$.

b) Démontrer le résultat suivant : Si (u_n) et (v_n) sont deux suites positives et si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v_n$ sont de même nature.

c) Déterminer $\underset{n\to\infty}{lim} \mathbb{P}(E_n)$ et en déduire $\mathbb{P}(X = 0)$.

Problème 2 :

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On étudie la diffusion d'une information.

— A l'instant $n = 0$, une seule personne possède cette information et la trouve intéressante.
— Si une personne trouve cette information intéressante à un instant $n \in \mathbb{N}$, elle la diffuse à N nouvelles personnes qui n'étaient pas au courant jusqu'alors, et qui sont alors au courant à l'instant $n+1$.
— Il y a une probabilité $p \in]0,1[$ qu'une personne donnée trouve cette information intéressante, à tout instant.
— On suppose par ailleurs que toutes les personnes mises au courant sont différentes les unes des autres. Ainsi, une personne n'est jamais mise au courant en même temps par deux personnes différentes.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de nouvelles personnes ayant reçu l'information à l'instant n exactement et qui l'ont trouvée intéressante.

① Écrire en Python une fonction `X(n, N, p)` qui prend en arguements des entiers `n` et `N`, un flottant $p \in]0,1[$, qui simule l'expérience décrite et qui retourne le nombre de personnes qui reçoivent l'information à l'instant `n` et qui vont ensuite la transmettre.

② On souhaite déterminer la loi de X_1 ainsi que son espérance.

a) Déterminer $X_1(\Omega)$ et justifier que $\forall k \in X_1(\Omega)$, $\mathbb{P}(X_1 = k) = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$.

b) Dans le cas fini, on rappelle que $\mathbb{E}(X_1) = \sum_{k \in X_1(\Omega)} k\mathbb{P}(X_1 = k)$. Montrer que $\binom{N}{k} = \frac{N}{k}\binom{N-1}{k-1}$.
Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.

③ On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
Justifier que (u_n) est croissante. En déduire qu'elle converge (on ne cherchera pas à déterminer la limite).

④ a) Expliquer à l'aide d'une interprétation pourquoi nous avons l'égalité : $\mathbb{P}_{(X_1=k)}(X_{n+1} = 0) = u_n^k$.

b) Justifier que $\{(X_1 = k), k \in [\![0, N]\!]\}$ est un système complet d'événements et montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = (1 - p + pu_n)^N$$

⑤ Dans la suite de l'énoncé, on se place dans le cas où $N = 2$. La suite étudiée vérifie donc la relation de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$$u_{n+1} = (1 - p + pu_n)^2$$

a) Montrer que les limites possibles sont 1 et $\frac{(1-p)^2}{p^2}$.

b) On se place dans le cas où $p \leq \frac{1}{2}$. Comparer alors 1 et $\frac{(1-p)^2}{p^2}$. Quelle est alors la limite de la suite (u_n) ?
Interpréter ce résultat.

c) On se place dans le cas où $p > \frac{1}{2}$. On considère la fonction $f : x \longmapsto (1-p+px)^2$.
Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{(1-p)^2}{p^2}\right]$, $f(x) \in \left[0, \frac{(1-p)^2}{p^2}\right]$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

Problème 3 :

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On dispose de deux urnes U et V, l'urne U contenant une boule blanche et $(n-1)$ boules noires et l'urne V contenant une boule noire et $(n-1)$ boules blanches.
Un joueur choisit une urne au hasard pour le premier tirage puis il effectue des tirages d'une boule qui sera remise dans l'urne dont elle provient, selon deux protocoles étudiés dans les deux parties de cet exercice.

Pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on note B_i l'événement « on obtient une boule blanche au i^{e} tirage ».

On note X le numéro du tirage pour lequel on obtient, pour la première fois, une boule noire. On admet que X est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$.

Pour finir, on note U l'événement « le premier tirage a lieu dans l'urne U ».

Partie 1

Dans cette partie, les tirages qui suivent le premier tirage ont lieu dans l'urne choisie au premier tirage.

① a) Déterminer $\mathbb{P}_U(X=1)$ et $\mathbb{P}_{\overline{U}}(X=1)$ avant d'en déduire $\mathbb{P}(X=1)$.

b) Pour tout entier k supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $(X=k)$ à l'aide de certains des événements B_i ou $\overline{B_i}$, puis montrer que :

$$\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{k-1}\frac{n-1}{n} + \left(\frac{n-1}{n}\right)^{k-1}\frac{1}{n}\right)$$

Vérifier que cette formule reste valable pour $k=1$.

② a) On convient que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$. Vérifier qu'on a ainsi défini une loi de probabilité de X en montrant que la série $\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(X=k)$ est une série à termes positifs convergente et que sa somme sur $X(\Omega)$ vaut 1.

b) On dira que X admet un espérance si la série $\sum_{k\geq 1} k\mathbb{P}(X=k)$ converge absolument et on admettra que sous cette condition $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\mathbb{P}(X=k)$. Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

③ On décide de coder l'événement U par 1 et l'événement $\overline{U}$ par 0.

a) Quelle bibliothèque et quelle fonction vous permet sous Python de retourner de façon équiprobable un **entier** au hasard dans l'intervalle $[\![0,1]\!]$?

b) On suppose avoir importé la bibliothèque `random` en exécutant : `import random as rdm`. Compléter le programme suivant pour qu'il permette le calcul et l'affichage de la valeur prise par la variable aléatoire X à l'issue de l'expérience décrite dans cette partie.

```python
def simulX(n:int) -> int:
    urne = ... # choix de l'urne au hasard
    x = 0
    if urne == 0:
        # A compléter (plusieurs lignes possibles)
    else:
        # A compléter (plusieurs lignes possibles)
    return ... # A compléter.
```

c) On souhaite confirmer informatiquement l'espérance de X obtenue en 2.b). Écrire une fonction `estimEspX(n, m)` d'arguments l'entier n et un entier m supposé grand, qui renvoie, sans faire appel à une quelconque fonction prédéfinie Python, la moyenne de m appels successifs à la fonction `simulX(n)`.

Partie 2

Dans cette partie, le protocole est le suivant : les tirages qui suivent le premier tirage dépendent de la couleur de la boule tirée. Ils ont lieu dans l'urne U si le tirage précédent a donné une boule blanche et dans l'urne V sinon.

① a) Donner $\mathbb{P}(X=1)$.

b) En procédant comme dans la partie 1, montrer que : $\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}\frac{n-1}{n}$

② Établir que X possède une espérance et donner sa valeur.

③ Avec les mêmes conventions et les mêmes notations que celles de la partie 1, écrire une fonction Python qui renvoie la valeur prise par la variable aléatoire X lors de l'expérience décrite dans cette partie.