Devoir maison : Probabilités

L'objectif de ce problème est l'étude de l'efficacité d'un traitement T destiné à éradiquer une population de cellules indésirables. Pour tester T, on agit comme suit :

① On prélève une cellule unique C_0 à laquelle on applique T, ce qui a pour effet de partager C_0 en un nombre naturel aléatoire D_1 de cellule(s) identique(s) à C_0 qu'on appellera enfants(s) de C_0 ou descendant(s) de première génération de C_0 lorsque $D_1 > 0$; Si $(D_1 = 0)$ est réalisé, le traitement est terminé.

② Lorsque C_0 a k enfant(s) avec $k \geq 1$, on leur applique à chacun le traitement T et leur comportement sera le même que celui de C_0 et ceci indépendamment les uns des autres lorsque $k > 1$.

③ A l'issue de cette étape, on obtiendra un nombre naturel aléatoire D_2 de descendant(s) de deuxième génération. Si $(D_2 = 0)$ est réalisé, on s'arrête, sinon on poursuit dans les mêmes conditions et, pour $n \geq 1$, on notera D_n le nombre de descendants de n-ième génération tant que $D_n > 0$.

Rq (*) : Les cellules de $(n+1)$-ième génération de C_0 sont celles de n-ième génération de l'ens. des enfants de C_0.

Notations.

— On notera conventionnellement $D_0 = 1$ (variable aléatoire certaine égale à 1).

— On notera $p_k = \mathbb{P}(D_1 = k)$ pour $k \in \mathbb{N}$ (p_k représente donc la probabilité pour une cellule quelconque C d'avoir k enfants, étant entendu qu'on utilisera la même variable aléatoire pour toutes les cellules sauf en cas d'ambiguïté).

On supposera bien entendu $0 < p_0 < 1$ et on aura $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} p_k = 1$.

— On notera $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \mathbb{P}(D_n = 0)$. Lorsque $\displaystyle\lim_{n\to\infty} u_n = 1$, c'est-à-dire lorsque avec une probabilité de 1 la descendance de C_0 s'éteint au bout d'un nombre fini de générations, on dira que T est efficace. On désignera par G le nombre aléatoire de générations de descendants de C_0. Ainsi :

Si C_0 n'a pas d'enfant : $(D_1 = 0)$ implique $G = 0$.
Si $(D_1 > 0)$ et $(D_2 = 0)$ sont réalisés, alors $G = 1$.
Si d'une façon générale, pour $n_0 \geq 1$, $(D_{n_0-1} > 0)$ et $(D_{n_0} = 0)$, alors $G = n_0 - 1$.

— On notera $\mathbb{E}(X)$ l'espérance d'une variable aléatoire X. Pour deux événements A et B avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$, $\mathbb{P}(A|B)$ désignera la probabilité de A sachant B.

Premier exemple

① La loi de D_1 est définie par $p_0 > 0$ et $p_1 > 0$ tels que $p_0 + p_1 = 1$.

a) Calculer u_0 et u_1. Montrer que pour tout $n \geq 0$, D_n ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

b) Montrer que s'il existe $n \geq 1$ tel que $D_n = 0$, alors pour tout entier $k \geq 0$, $D_{n+k} = 0$.

② a) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = 0))p_0 + \mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = 1))p_1$$

puis, en utilisant la remarque $(*)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = 1)) = u_n$ et enfin que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = p_0 + p_1 u_n$.

b) En posant $v_n = 1 - u_n$, montrer que $u_n = 1 - p_1^n$ et en déduire la limite de u_n.

c) Montrer que $\mathbb{P}(G > n) = 1 - u_{n+1} = p_1^{n+1}$ puis que $\mathbb{P}(G = n) = p_0 p_1^n$ et enfin que $\mathbb{E}(G) = p_1/p_0$.

③ a) Écrire une fonction Python `simulG1(p0)` qui simule l'application du traitement et retourne le nombre de générations de descendants de C_0.

b) En déduire une fonction `estimEspG1(p0,m)` de paramètre d'entrée le réel p_0 et l'entier m supposé grand et qui retourne une estimation de $\mathbb{E}(G)$.

Deuxième exemple

① La loi de D_1 est définie par p_0, p_1 et p_2 tels que $p_0 > 0$, $p_2 > 0$ et $p_0 + p_1 + p_2 = 1$.

a) Montrer que pour $0 \leq k \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = k)) = u_n^k$. On utilisera notamment la remarque $(*)$ et on prendra soin de distinguer les cas $k = 0$ et $n = 0$.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1} = 0) = \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}((D_{n+1} = 0)|(D_1 = k))p_k = p_0 + p_1 u_n + p_2 u_n^2$$

② Soit f la fonction de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \longmapsto f(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2$$

a) Vérifier que $f > 0$, $f' \geq 0$, $f'' > 0$, $f(1) = 1$, $f'(1) = 1 - p_0 + p_2$.

b) Représenter le graphe de f dans les trois cas suivant : $f'(1) < 1$, $f'(1) = 1$ et $f'(1) > 1$ (on choisira des valeurs simples de p_0, p_1 et p_2 pour chaque cas).

c) Vérifier par le calcul que :

i. pour $f'(1) \leq 1$, le graphe de f est au dessus de la première bissectrice $\Delta : (y = x)$;

ii. pour $f'(1) = 1$ le graphe est tangent à Δ au point $I(1, 1)$;

iii. pour $f'(1) > 1$, le graphe recoupe la première bissectrice au point $L(p_0/p_2, p_0/p_2)$.

d) Montrer que la suite de terme général u_n est strictement croissante et majorée par $min(p_0/p_2, 1)$.

e) En déduire la limite de la suite de terme général u_n dans les différents cas envisagés. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que le traitement soit efficace (c'est-à-dire $\underset{n\to\infty}{lim}\, u_n = 1$).

③ Examen des différents cas.

a) Cas où $f'(1) < 1$: démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} \leq (1 - u_n)f'(1)$.
Puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \leq (1 - u_0)\left(f'(1)\right)^n$.

b) On s'intéresse au cas où $f'(1) = 1$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} = \frac{p_0}{p_1 + p_0(1 + u_n)} \leq 1$$

En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1 - u_{k+1}} - \frac{1}{1 - u_k} \right) = \frac{1}{1 - u_n} - 1 \leq n$

puis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$

c) Montrer que $\mathbb{E}(D_1) = f'(1)$ et que $\mathbb{P}(G > n) = 1 - u_{n+1} = \mathbb{P}(D_{n+1} \neq 0)$.

④ *Propriété :* Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ ayant une espérance $\mathbb{E}(X)$. On admet que dans ce cas :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{N=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X > N)$$

Déduire de cette propriété que :

— si $f'(1) < 1$ alors $\mathbb{E}(G) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (1 - u_n) \leq \frac{f'(1)}{1 - f'(1)}$

— si $f'(1) = 1$ alors G n'a pas d'espérance (on utilisera pour ça la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{n+1}$).

⑤ En vous inspirant du premier exemple, question 3), écrire des fonctions python vous permettant d'estimer l'espérance de G dans le cas où $f'(1) < 1$.