COLLE 1 - SUJET 1 - SUITES NUMERIQUES ET ANALYSE

Cours :

Énoncer le théorème de Rolle.

Exercice 1 :

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \ln(u_n)$.
Cette suite est monotone ? tend vers 0 ? converge ? n'est pas définie ?

Exercice 2 :

Soit f définie sur $]1; +\infty[$ définie par $f : x \longrightarrow \dfrac{x}{\ln(x)}$

① a) Étudier les variations de f.

b) Établir que la restriction $\tilde{f}$ de f à $]1, e[$ réalise une bijection sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Tracer dans un même repère l'allure des graphes de $\tilde{f}$ et $\tilde{f}^{-1}$.

② Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation $x = n\ln(x)$ admet une unique solution x_n dans $]1, e[$.

③ Estimer le sens de variation de la suite $(x_n)_{n\geqslant 3}$ à l'aide du logiciel Geogebra.

④ Démontrer l'hypothèse faite à la question précédente.

⑤ En déduire que $(x_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

⑥ Retrouver ce résultat à l'aide de l'algorithme de dichotomie (redonné sur la dernière page de cette séquence d'exercices).

COLLE 1 - SUJET 2 - SUITES NUMERIQUES ET ANALYSE

Cours :

Développements limités de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ et $x \longmapsto \ln(1+x)$.

Exercice 1 :

Ensemble de continuité et de dérivabilité de $x \longmapsto \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Exercice 2 :

Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 & = 0 \\ u_{n+1} & = \sqrt{u_n+1}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$
On pose, pour tout réel $x \geqslant -1$, $f(x) = \sqrt{x+1}$

① Montrer que $f([0;2]) \subset [0;2]$ et que : $\forall x \in [0;2], |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$.

② Déterminer les points fixes de f. Notons r l'unique point fixe de f dans $[0;2]$

③ Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

④ Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - r| \leqslant \dfrac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$

⑤ Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

⑥ Déterminer un entier N tel que $|u_N - r| \leqslant 10^{-9}$

⑦ Écrire un programme `Python` donnant une valeur approchée de r à 10^{-9} près.

COLLE 1 - SUJET 3 - SUITES NUMERIQUES ET ANALYSE

Cours :

Rappeler la formule des accroissements finis.

Exercice 1 :

Soit $f : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2)}{x} & \text{si} x > 0 \\ 0 & \text{si} x \leq 0 \end{cases}$ et $g : x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\ln(x^2)}{x-1} & \text{si} x > 1 \\ 0 & \text{si} x \leq 1 \end{cases}$

Pour chacune de ces fonctions, dire si elles sont continues, dérivables, prolongeables par continuité...

Exercice 2 :

On se propose de résoudre l'équation $(x+1)e^{-x} - x = 0$.

① On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par : $g(x) = (x+1)e^{-x} - x$.

a) Étudier les variations de g.

b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α et une seule qui appartient à l'interalle $]0, 1[$.

② On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}[2(x+1)e^{-x} + x]$.

a) Démontrer que l'équation $f(x) - x = 0$ admet α comme unique solution.

b) Calculer f' et f'' et en déduire les variations de f.

c) Soit $I = [0.8, 0.9]$. Justifier le fait que $\alpha \in I$, que I est stable par f et que pour tout $x \in I$, $f'(x) \in [0, 0.1]$.

③ On désigne par (u_n) la suite définie par $u_0 = 0.8$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Montrer que $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{10}|u_n - \alpha|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) En déduire la convergence et la limite de la suite (u_n).

c) Pour quelle valeur de n obtient-on une valeur décimale approchée de α à 10^{-5} près.

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a,b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a,b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.