3 T.D. séries numériques réelles

Les objectifs : Sommes partielles, convergence d'une série, somme d'une série convergente.
Combinaison linéaire de séries convergentes.
Théorème de convergence par comparaison pour deux séries à termes positifs.
Convergence et somme de la série géométrique et de ses dérivées.
Convergence et somme de la série exponentielle.
Convergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et divergence de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.
Convergence absolue.

Exercice 1 ❤ : Reconnaître les séries usuelles

Déterminer la nature et la somme éventuelle des séries :

$a)\ \sum_{n\geq 0} \sqrt{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$; $\quad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n}{3^n}$; $\quad c)\ \sum_{n\geq 1} \sin(n)$; $\quad d)\ \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{n!}$

$e)\ \sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+1}}{3^n n!}$; $\quad f)\ \sum_{n\geq 0} -5\left(\ln(2)\right)^n$; $\quad g)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^2+n+1}{4^n}$; $\quad h)\ \sum_{n\geq 1} \ln^2(n)$

$i)\ \sum_{n\geq 0} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$; $\quad j)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n^3 2^n + n^2 3^n}{n!}$

Remarque : Dans le cas j), on montrera au préalable que $n^3 = n(n-1)(n-2) + 3n(n-1) + n$.

Exercice 2 ✶ : Reconnaître les séries télescopiques

Déterminer la nature et calculer la somme éventuelle des séries suivantes :

$a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{1+2+\cdots+n}$; $\quad b)\ \sum_{n\geq 0} \frac{4}{(2n+1)(2n+3)}$; $\quad c)\ \sum_{n\geq 1} \ln\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$; $\quad d)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\sin\frac{1}{n(n+1)}}{\cos\frac{1}{n}\cos\frac{1}{n+1}}$

Exercice 3 ✶ : Appliquer le théorème de comparaison

Déterminer la nature des séries suivantes :

$a)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\sqrt{n}}{3^{n+2}}$; $\quad b)\ \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(1+n)}{n}$; $\quad c)\ \sum_{n\geq 0} \frac{n\arctan n}{e^n}$;

$d)\ \sum_{n\geq 0} \frac{2n-10}{(n+1)^3}$; $\quad e)\ \sum_{n\geq 0} \frac{1+\sin n}{n!}$; $\quad f)\ \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+\ln n}$

Exercice 4 ✶ : Savoir utiliser la convergence absolue

Déterminer la nature des séries suivantes :

$$\text{a)} \sum_{n\geq 0} \frac{\cos(n)}{n+2^n}; \qquad \text{b)} \sum_{n\geq 0} \frac{(-3)^n}{2^n+4^n}$$

Exercice 5 ✶✶ : Équivalences et théorème de comparaison

On souhaite faire l'étude de la suite d'Euler définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n).$$

① On pose $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Montrer que les développements limités usuels permettent d'obtenir que :

$$v_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

② Montrer qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_0,\ \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{|v_n|}{1/2n^2} \leq \dfrac{3}{2}$.

③ En déduire que la série de terme général v_n converge.

④ Montrer que la suite (u_n) converge et en déduire que

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} \ln(n)$$

Exercice 6 ✶✶ :

Soit $x \in [-1, 1[$.

① Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout t de $]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k = \dfrac{t^{n+1}}{1-t}$.

② En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [-1, x]$, $\left|\dfrac{1}{1-t} - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} t^k\right| \leq \dfrac{|t|^{n+1}}{1-x}$

③ Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left|-\ln(1-x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1}\right| \leq \dfrac{1}{(n+2)(1-x)}$

④ En déduire que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et a pour somme $-\ln(1-x)$.

En particulier, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n} = \ln(2)$