2 T.D. Fonctions

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ;
Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont les techniques se retrouvent à l'écrit ; Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou bien qui font appel à de l'algorithmique dans l'esprit de l'oral ou de l'épreuve B de l'Agro.

⚠ *Les objectifs* : Reconnaître, distinguer et employer les graphes des fonctions usuelles, à savoir : Fonctions puissances d'exposant entier, polynômes, racine carrée, exponentielle et logarithme népérien ($\ln$), fonctions exponentielle $x \longmapsto a^x$ où $a \in \mathbb{R}_+^*$, fonction logarithme décimal ($\log$), fonctions puissances $x \longmapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, fonctions circulaires, partie entière ($\lfloor \cdot \rfloor$) et valeur absolue ($| \cdot |$).
Calculs de dérivées et de primitives en vue d'applications à la physique et aux équations différentielles.
Limites, comparaison de fonctions, continuité (théorème des valeurs intermédiaires) et bijections continues (fonctions $\sqrt[n]{}$ et $\arctan$). Résolution approchée d'une équation du type $f(x) = 0$.
Dérivation : Théorème de Rolle, formule des accroissements finis, recherche d'extremum, dérivées d'ordre supérieur.
Développements limités (développements usuels : exp, cos, sin, $x \longmapsto 1/(1+x)$, $x \longmapsto ln(1+x)$ et $x \longmapsto (1+x)^\alpha$).
Exemples d'approximations numériques des fonctions dérivées.

Exercice 1 ✶ : Calculs de limites

Déterminer les limites suivantes :

$$a)\lim_{x\to 0}\left(ln(sinx) - lnx\right); \quad b)\lim_{x\to 0}\frac{sin(1/x)}{e^{1/x}+1}; \quad c)\lim_{x\to +\infty} e^{x-sinx}; \quad d)\lim_{x\to 0}\left\lfloor \frac{1}{x}\right\rfloor$$

$$e)\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor\right); \quad f)\lim_{x\to +\infty}\frac{x-\sqrt{x}}{ln(x)+x}; \quad g)\lim_{x\to +\infty} x^2e^{-\sqrt{x}}; \quad h)\lim_{x\to +\infty}\frac{ln(1+e^x)}{x}$$

$$i)\lim_{x\to 1}\frac{cos(ax)-cos(a)}{e^{-ax^2}-e^{-}a}(a>0); \quad j)\lim_{x\to a}\frac{sin^2x - sin^2a}{x^2-a^2};$$

$$k)\lim_{x\to 0}\frac{tanx - sinx}{x^3}; \quad l)\lim_{x\to 0}\frac{x^x-1}{x}; \quad m)\lim_{x\to +\infty}\left(xe^{1/x}-x\right); \quad n)\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sqrt{1+sinx}}-e}{tanx}$$

Exercice 2 ✶ : Fonctions usuelles

① Résoudre $\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x & = -5 \\ xy & = e \end{cases}$

② Ensemble de définition, parité et tableau de variation de $f : x \longmapsto \sqrt[3]{x^2+2x}$;
Montrer que la droite d'équation $(x = -1)$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}_f$

③ Calculer $S = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{5}\right) + \arctan\left(\frac{1}{8}\right)$

En déduire $T = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$

Exercice 3 ✶ : Continuité et dérivabilité des fonctions suivantes

$$f : x \mapsto \begin{cases} x^2\ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad ; \quad g : x \mapsto \begin{cases} x^2 sin(\dfrac{1}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad ; \quad h : x \mapsto \begin{cases} x sin(\dfrac{\pi}{x}) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Exercice 4 ✶ : calcul de dérivée

Soit $f : x \mapsto \arctan(x) + 2\arctan(\sqrt{1+x^2} - x)$. f est plus simplement :

① une constante ?

② $\tan$?

③ la fonction identité ?

④ aucune des trois réponses précédentes n'est vraie ?

Exercice 5 ✶✶ : Dérivées de fonctions réciproques

① Montrer que la fonction sinus est une bijection de $I = [-\pi/2, \pi/2]$ sur $[-1, 1]$. On note A la réciproque de la fonction sinus restreinte à l'intervalle I.

② Déterminer $A(1/2)$ et $A(-\sqrt{2}/2)$.

③ Tracer le graphe de la fonction A dans le plan usuel muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

④ Soit $x \in [-1, 1]$. Montrer que $\cos(A(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

⑤ Montrer que la fonction A est dérivable sur $]-1, 1[$ et donner l'expression de sa dérivée sous une forme simplifiée ne faisant plus intervenir de fonction trigonométrique.

⑥ **a.** Déterminer le développement limité à l'ordre 1 de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$

b. Montrer que la fonction A admet un développement limité à l'ordre 3 en 0 donné par :

$$A(x) = x + \frac{x^3}{6} + \circ(x^3)$$

Exercice 6 ❤ : Th. de Rolle et F. des Accroissements finis

① Montrer les inégalités suivantes :

a. $\forall x \in \mathbb{R},\ e^x \geq 1 + x$

b. $\forall x \in [0, \pi/2],\ sinx \leq x$

c. $\forall x \in [0, +\infty[,\ \dfrac{x}{1+x^2} \leq Arctanx \leq x$

② Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(x) \leq -3$. Montrer que :

$$\exists! y \in \mathbb{R} / f(y) = 2y$$

Exercice 7 ✶ : Développements limités

Déterminer les développements limités suivants :

1) $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}}$ à l'ordre 2 en 0 ;
2) $\ln\left(\dfrac{1}{cosx}\right)$ à l'ordre 4 en 0 ;
3) $(ln(1+x))^2$ à l'ordre 4 en 0 ;
4) $\sqrt{x}$ à l'ordre 3 en 2 ;
5) $Arctan(x)$ à l'ordre 5 en 0 ;
6) $\dfrac{1}{1+e^x}$ à l'ordre 3 en 0 ;
7) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ à l'ordre n en 0

Exercice 8 ✶✶ : Application des développements limités

① Soit f, fonction définie sur $[0, \pi/4]$ par : $f(x) = (1 - 2sinx) \cdot tan(3x)$.
Déterminer son ensemble de définition et déterminer sa continuité et sa dérivabilité sur cet ensemble.

② Soit la fonction f définies par : $f(x) = 2x - 1 - \sqrt{x^2 - 4x}$.
Déterminer son ensemble de définition et étudier les branches infinies de f en précisant les positions de la courbe par rapport à ses asymptotes.

③ Mêmes questions pour f définie par $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2)(x + 3)}$.

Exercice 9 : ✶✶ suites récurrentes

Étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\text{a) } \begin{cases} u_0 & = 1 \\ u_{n+1} & = \dfrac{u_n}{u_n^2 + 1} \end{cases} \; ; \quad \text{b) } \begin{cases} u_0 & = 2 \\ u_{n+1} & = \sqrt{1 + u_n} \end{cases} \; ; \quad \text{c) } \begin{cases} u_0 & \in [1/3, +\infty[\\ u_{n+1} & = \sqrt{u_n - \dfrac{2}{9}} \end{cases}$$

Exercice 10 ❤ : F. des Accroissements finis

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{e^{u_n} + 1}$

① Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $u_n \in [0, 1]$.

② Montrer qu'il existe un unique réel λ tel que : $\dfrac{e^{\lambda}}{e^{\lambda} + 1} = \lambda$. Démontrer que $\lambda \in]0, 1[$.

③ Prouver que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \lambda| \leq \dfrac{1}{4}|u_n - \lambda|$

④ Démontrer que la suite (u_n) converge et calculer sa limite. En donner une valeur approchée grâce à Python.

Pour d'autres exercices, fréquents à l'oral (cf. Planche 3), on retiendra :

suites définies implicitement
Dans certains exercices, on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n comme étant l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 0$. Très souvent, f est strictement monotone (et continue) sur un intervalle.
Pour étudier la monotonie de $(u_n)_n$, on est amené par exemple à étudier le signe de $f_{n+1}(u_n)$ (ou de $f_n(u_{n+1})$).

Si par exemple pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est décroissante et qu'on trouve par exemple $f_{n+1}(u_n) < 0$, en se souvenant que $0 = f_{n+1}(u_{n+1})$, il vient $f_{n+1}(u_n) < f_{n+1}(u_{n+1})$ et donc, par stricte décroissance de f_{n+1}, $u_n > u_{n+1}$. Dans ce cas la suite (u_n) serait décroissante.
ces idées générales sont à adapter à chaque exercice
Se souvenir qu'on joue souvent <u>à la fois</u> sur les monotonies de :
• $n \mapsto f_n(x)$ (x fixé)
• $x \mapsto f_n(x)$ (n fixé)

Planches d'oraux

Planche 1 :

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^3}{9} + \dfrac{x}{3} + \dfrac{1}{9}$ et la suite récurrente $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par :

$$f(x_n) = x_{n+1},\ x_0 \in]0, 1[$$

① Montrer que $f(x) = x$ admet une unique solution c sur l'intervalle $]0, 1/2[$.

② Étudier la monotonie de la suite (x_n).

③ Étudier la convergence de la suite (x_n) et écrire une fonction Python permettant le calcul de x_n pour toute valeur entière de n entrée par l'utilisateur.

④ Donner une valeur approchée à ε près de la limite de (x_n) en utilisant l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous :

Algorithme de dichotomie
On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k \geq 0}$ et $(b_k)_{k \geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.

Planche 2 :

Pour $x > 0$, on pose $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$. On définit ensuite la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et pour $\forall n \geq 0 \quad u_{n+1} = f(u_n)$.

① **a.** Étudier les variations de f.
b. Montrer que la suite (u_n) est bien définie.

② **a.** Montrer que l'équation $f(x) = x$ a une unique solution . On l'appelle a.
b. Monter que $\frac{1}{e} < a < 1$.
c. Écrire une fonction donnant une valeur approchée de a à 10^{-3} près.
(La méthode de dichotomie est rappelée Planche 1.)

③ **a.** Montrer que $a < u_0 < u_2$ et $u_3 < u_1 < a$.
b. Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones .
Peuvent-elles converger vers une même limite ?
Qu'en déduit-on concernant la convergence de (u_n) ?

④ On pose, pour $x \geq 0$, $h(x) = \begin{cases} (f \circ f)(x) & si \quad x > 0 \\ 0 & si \quad x = 0 \end{cases}$.

a. Expliciter $h(x)$ pour $x > 0$. Montrer que h est continue en 0.
b. Résoudre $h(x) = x$.
c. Montrer que la suite (u_{2n+1}) est convergente et préciser sa limite.
d. Montrer que la suite (u_{2n}) diverge vers $+\infty$.

Planche 3 :

Pour tout entier naturel n on considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in [0, +\infty[,\ f_n(x) = x^{n+1} - x^n$$

① Montrer que l'équation $f_n(x) = 1$ admet une unique solution α_n sur $[0, +\infty[$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq \alpha_n \leq 2$$

② **Modélisation :** A l'aide de méthodes numériques ou graphiques, proposer des conjectures relatives à la monotonie et la limite de la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$.
Selon la méthode choisie, on pourra utiliser l'un des logiciels suivants : Python, Geogebra ou Excel. On pourra exploiter, ou non l'algorithme de dichotomie rappelé ci-dessous.

③ **Étude mathématique :**

a. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$, pour tout entier naturel n et tout réel positif x.
En déduire la monotonie de la suite (α_n).

b. Prouver que la suite (α_n) est convergente, vers une limite notée l.
En raisonnant par l'absurde, valider la conjecture faite en 2. pour la limite l de la suite (α_n).

Algorithme de dichotomie

On considère une fonction f continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que f s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note α
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel k on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
  si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
  sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites (a_k) et (b_k) convergent toutes les deux vers α en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier k est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors a_k et b_k sont des valeurs approchées à ε près de α.