1 T.D. Suites numériques

Remarque

Classement des exercices

Une ✶ signale une application directe des formules du cours ; Les exercices marqués d'un ❤ indiquent des exercices classiques dont les techniques se retrouvent à l'écrit ; Enfin les ✶✶ à ✶✶✶ désignent des exercices plus difficiles proposés à l'oral de G2E ou bien qui font appel à de l'algorithmique dans l'esprit de l'oral ou de l'épreuve B de l'Agro.

Les objectifs : Suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, récurrentes linéaires d'ordre 2.
L'attendu se limite à la maîtrise d'une méthode de calcul du n-ième terme.
Convergence, divergence. Limite infinie. Théorème de la limite monotone.
Suites adjacentes et théorème des suites adjacentes.
Exemple d'étude de suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
Croissances comparées : $a^n = \circ(n!)$ (avec $a > 1$) et $n^\alpha = \circ(a^n)$ (avec $\alpha > 0$) ; Suites équivalentes.

Exercice 1 ✶ : Quelques suites usuelles

Calculer en fonction de n le terme général des suites (u_n) définies par $u_0 = v_0 = 2$ et indiquer leur nature.
Écrire dans un second temps et pour chaque cas une fonction Python permettant de représenter graphiquement leurs n premiers termes (n étant proposé par l'utilisateur).

① $u_{n+1} = u_n + 3$; $v_{n+1} = v_n - 5$

② $u_{n+1} = 3u_n$; $v_{n+1} = v_n/2$

③ $u_{n+1} = 3u_n + 3$; $v_{n+1} = \dfrac{v_n + 1}{2}$

Exercice 2 ✶ : Les suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Même questions pour les suites (u_n) définies par récurrences par :

① $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 4$.

② $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ et $u_1 = 1$, $u_2 = 3$

③ $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$ et $u_0 = 1$, $u_1 = 2$

Exercice 3 ✶ : Croissances comparées et suites équivalentes

Déterminer le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :

$$a) u_n = \frac{5n^2 - 3n + 2}{n^2 - 2}; \qquad b) u_n = \frac{(-1)^n n^2 + 2n - 1}{n^2 - n + 2}; \qquad c) u_n = n \ln\left(\sqrt{\frac{n+1}{n-1}}\right);$$

$$d) u_n = \ln(2 - e^{1/n}); \qquad e) u_n = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n; \qquad f) u_n = \frac{n^2 + cos(n)}{2^n + nsin(n)};$$

$$g) u_n = \sqrt{\cos\left(\frac{1}{n}\right) - 1}; \qquad h) u_n = \sqrt{n} \sin\left(\frac{1}{\ln(n)}\right); \qquad i) u_n = n\frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$$

Exercice 4 ✶ :

Montrer qu'une suite arithmétique est caractérisée par la propriété suivante : « Chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit ».

Exercice 5 ✶ :

On considère deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies respectivement par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} \text{ et } v_n = 1 + \frac{1}{1!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n \cdot n!}$$

① Montrer que ces suites sont adjacentes et qu'elles convergent. On admettra qu'elles ont pour limite commune e.

② Écrire une fonction qui, sans utilisation de fonctions Python prédéfinies, calcule les termes u_n et v_n jusqu'à ce que $|u_n - v_n| = v_n - u_n < 10^{-6}$ et retourne $\dfrac{u_n + v_n}{2}$.

Exercice 6 ❤ :

Soit $(S_n)_{n\geq 1}$ définie par $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et u et v deux suites respectivement définies par $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

① Montrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

② Conclure que la suite $(S_n)_{n\geq 1}$ converge. On notera par la suite S sa limite.

③ En notant que : $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} = \displaystyle\int_0^1 t^{k-1} dt$, montrer que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = S = ln(2)$

④ En distinguant selon la parité de n, montrer que $|S - S_n| \leq \dfrac{1}{n+1}$. En déduire un moyen d'obtenir une valeur approchée à 10^{-p} près de $ln(2)$ où $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 7 ✶ :

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n e^{-u_n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

① Montrer la convergence de la suite (u_n) et déterminer sa limite.

② Montrer que $u_{n+1} - u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -u_n^2$ puis que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 8 ✶✶ : Somme de Riemann

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite $\left(\left(\dfrac{(2n)!}{n!n^n}\right)^{1/n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Qu'en pensez-vous ? $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $+\infty$? $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers e ? $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers $\dfrac{4}{e}$? $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas définie ?

Planches d'oraux

Planche 1

① **a.** On considère l'équation $(E) : x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} = 0$.
Trouver les racines de (E) et montrer qu'elles sont absolument inférieur à 1

b. On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+2} = \frac{1}{3}u_{n+1} + \frac{1}{3}u_n$.
Montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ pour tout $u_0, u_1 \in \mathbb{R}$.

② Soit a et b deux réels strictement positifs. On considère cette fois la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$\begin{cases} v_0 & = a \\ v_1 & = b \\ v_{n+2} & = \sqrt{v_{n+1}} + \sqrt{v_n} \end{cases}$$

a. Créer un programme Python avec a, b et n en paramètres et qui retourne la liste des n premiers termes $(n \geq 2)$ de la suite. Que peut-on conjecturer ?

b. On suppose que $a > 1$ et $b > 1$.

i. Montrer que v_n est strictement supérieur à 1.

ii. On pose $w_n = \frac{1}{2}\sqrt{v_n} - 1$. Montrer que :

$$w_{n+2} = \frac{w_{n+1} + w_n}{2w_{n+2} + 4}, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

iii. En déduire que $|w_{n+2}| \leq \frac{1}{3}|w_{n+1}| + \frac{1}{3}|w_n|$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

iv. Pouvez-vous valider la conjecture faite en 2.a) ?

c. Que se passe-t-il si $a \leqslant 1$ et $b \leqslant 1$?

Planche 2

Soit a un réel strictement supérieur à 0.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + a^n u_n, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ avec } u_0, u_1 \in \mathbb{R}_+^*$$

① Étudier les variations de la suite (u_n).

② $\forall a \in [1, +\infty[$, prouver que $\underset{n\to\infty}{lim} u_n = +\infty$

③ On suppose désormais que $a \in]0, 1[$.

a. Écrire un programme Python permettant le calcul de u_n pour tout entier naturel fourni en paramètre d'entrée.
On le testera avec $u_0 = 1$, $u_1 = 5$, $a = 0.1$, $a = 0.5$ et $a = 0.9$.

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul : $u_{n+2} \leq u_{n+1}(1 + a^n)$.

c. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x \leq e^x$.

d. En déduire la convergence de la suite (u_n)