Correction du DS02 - révisions d'analyse (suite)

Exercice : Calculs rapides et méthodes usuelles

1. Calcul de sommes usuelles :

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{3}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)}$$

$$S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k}\frac{1}{3^k} = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n - \binom{n}{n}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\left(\frac{4}{3}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

2. *Rappelons la formule de Pascal :* $\boxed{\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}}$

   Application :

$$\begin{aligned}\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p} &= \binom{p}{p} + \sum_{k=p+1}^{n}\left(\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}\right)\\ &= 1 + \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = 1 + \binom{n+1}{p+1} - 1\\ &= \boxed{\binom{n+1}{p+1}, \forall 0 \leq p \leq n}\end{aligned}$$

3. Soit f la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$.

   a) *Précisons son ensemble de définition :*

$$1 + \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq -1 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ ou } x \geq 0$$

   Conclusion : $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty, -1] \cup \mathbb{R}_+}$

   b) *Montrons que $\Omega = (-\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$:*

   Il suffit de montrer que $\dfrac{f(-\frac{1}{2}-x) + f(-\frac{1}{2}+x)}{2} = 0 \Leftrightarrow f(-\frac{1}{2}-x) + f(-\frac{1}{2}+x) = 0$

   Pour tout $x > \frac{1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned}f\left(-\frac{1}{2}-x\right) + f\left(-\frac{1}{2}+x\right) &= f\left(-\frac{1+2x}{2}\right) + f\left(\frac{-1+2x}{2}\right)\\ &= -\frac{1+2x}{2}\sqrt{1-\frac{2}{1+2x}} + \frac{-1+2x}{2}\sqrt{1+\frac{2}{2x-1}}\\ &= -\frac{1+2x}{2}\sqrt{\frac{2x-1}{1+2x}} + \frac{2x-1}{2}\sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}}\\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{(2x+1)(2x-1)} + \frac{1}{2}\sqrt{(2x+1)(2x-1)} = 0\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\Omega = (-\frac{1}{2}, 0) \text{ est centre de symétrie de } \mathcal{C}_f}$

c) *Déterminons l'équation de ses asymptotes en précisant leur position par rapport à la courbe*

On commence par noter que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ puis posons $X = \frac{1}{x}$. Alors :

$$Xf\left(\frac{1}{X}\right) = X\frac{1}{X}\sqrt{1+X} = 1 + \frac{1}{2}X - \frac{1}{8}X^2 + \circ(X^2)$$

D'où

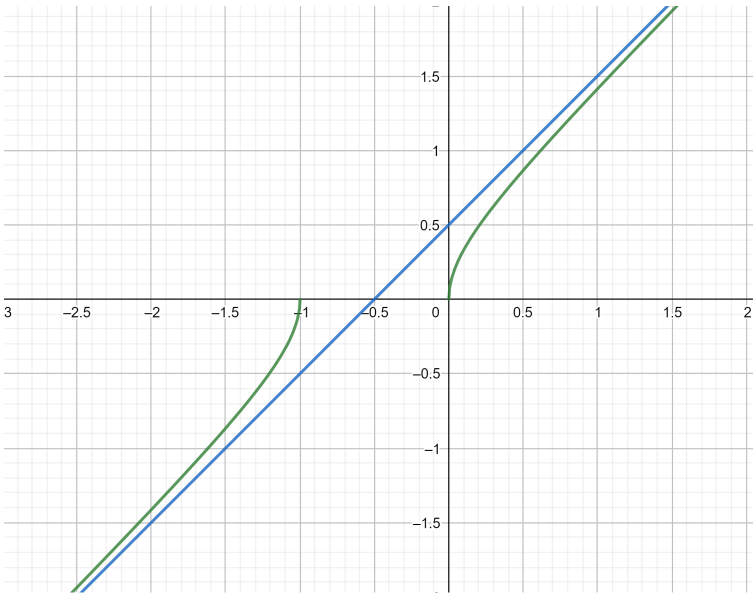
$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}X + \circ(X)$$

ou encore

$$f(x) \underset{+\infty}{=} x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + \circ\left(\frac{1}{x}\right)$$

On en déduit que la droite d'équation $\boxed{y = x + \frac{1}{2}}$ est asymptote à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$. La position de la courbe par rapport à ces asymptotes étant donné par le signe de $-\frac{1}{8x}$.

Conclusion : $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est sous son asymptote en } +\infty, \text{ au-dessus en } -\infty.}$



4. Soit la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

a) *Donnons le développement limité à l'ordre 1 de f au voisinage de 0 :* On utilise le développement limité au voisinage de 0 de $\ln(1+u)$ qui, rappelons-le, est :

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + \circ(u^2)$$

Dès lors :

$$\ln(1+2x) = 2x - 2x^2 + \circ(x^2)$$

D'où $\boxed{f(x) = 1 - 2x + \circ(x)}$

b) *La fonction f est-elle continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$? dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$?*

On commence par dire qu'elle est continue et dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[\subset 0$ comme produit et somme de fonctions continues et dérivables sur cet intervalle ($x \longmapsto \frac{1}{x}$, $x \longmapsto \ln(1+2x)$ et $x \longmapsto -1$).

Par ailleurs, f admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de 0. On peut donc conclure qu'elle est **continue** et **dérivable** en 0.

Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue et dérivable sur }]-\frac{1}{2}, +\infty[}$

Calculons sa dérivée en tout x pour lequel cela a un sens :

Pour $x = 0$, le développement limité au voisinage de 0 donne immédiatement : $f'(0) = -2$.

Et pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{2x+1} - \ln(1+2x)}{x^2}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{2x - (1+2x)\ln(1+2x)}{x^2(1+2x)} & \end{cases}}$

c) Montrer que f est strictement monotone et tracer son tableau de variation.

Le signe de f' est celui de son numérateur $h(x) = 2x - (1+2x)\ln(1+2x)$.

$\forall x \neq 0$, $h'(x) = -2\ln(1+2x)$.

On en déduit que $h'(x) > 0$ sur $]-1/2, 0[$ et négative sur $\mathbb{R}_+$.

Dès lors, h est croissantes ur $]-1/2, 0[$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Et comme $h(0) = 0$, on peut conclure que h est strictement négative (sauf en $x = 0$).

Conclusion : $\boxed{f \text{ est strictement décroissante}}$

Problème 1 :

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f_n par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.

On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

5. a) *Déterminons, pour tout réel n, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$:*

La fonction $x \longmapsto 1 + e^x$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

Dès lors, f_n est une fonction de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}$.

Un calcul immédiat donne : $\boxed{f_n'(x) = -\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2} + n \text{ et } f_n''(x) = \dfrac{e^x(e^x-1)}{(1+e^x)^3}, \forall x \in \mathbb{R}}$

b) *Déduisons-en les variations de la fonction f_n :*

f_n'' s'annule en $x = 0$. Elle est positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et négative sur $\mathbb{R}_-^*$.

Dès lors, f_n' est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle admet son minimum en 0 qui vaut $f_n'(0) = n - \dfrac{1}{4} > 0$.

On en déduit que $f_n'(x) > 0$ pour tout x réel.
Conclusion : $\boxed{f_n \text{ est croissante sur } \mathbb{R}.}$

6. a) *Déterminons les limites de f_n aux bornes de son ensemble de définition :* $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} nx = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty}$.
De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} nx = -\infty$, donc immédiatement $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = -\infty}$

b) *Déterminons les équations des droites asymptotes (D_n), (D_n') en $+\infty$ et en $-\infty$ de $(\mathcal{C}_n)$:*

— En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x(1+e^x)} + n = n.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (f_n(x) - nx) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 0.$ ***Conclusion*** : $\boxed{(D_n) \text{ a pour équation : } y = nx}$

— En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x(1+e^x)} + n = n.$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (f_n(x) - nx) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{1+e^x} = 1.$ ***Conclusion*** : $\boxed{(D_n') \text{ a pour équation : } y = nx + 1}$

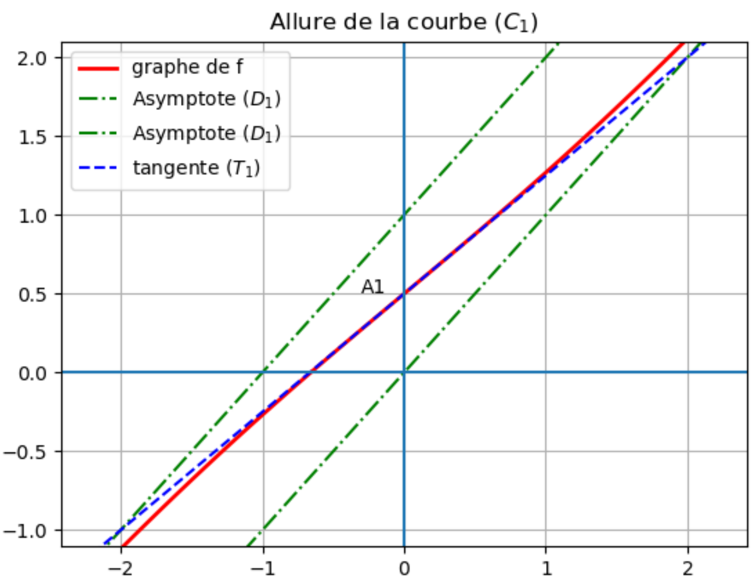
c) *Déterminons les coordonnées du seul point noté A_n où f_n'' s'annule en changeant de signe :*

$$f_n''(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$$

Conclusion : $\boxed{f_n'' \text{ s'annule en changeant de signe en } A_n = (0, f_n(0)) = (0, 1/2)}$

d) *Donnons l'équation de la tangente (T_1) à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en A_1 :*

Par définition (T_1) a pour équation : $y = f_1(0) + f_1'(0)x = \dfrac{1}{2} + (-\dfrac{1}{4} + 1) = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{1}{2}$
puis traçons les droites (D_1), (D_1') et (T_1) ainsi que l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_1)$:



7. a) La fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \longmapsto 1+e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas, et donc $x \longmapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ est continue sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après la question 1.b) elle est strictement croissante.
Donc f_n est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ d'après les limites obtenues en 2.a).
Dès lors, le théorème de la bijection assure que : $\boxed{f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution sur } \mathbb{R}}$.

b) *Montrons que l'on a :* $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$
Par définition $f_n(u_n) = 0$. Or $f_n(0) = \dfrac{1}{2} > 0$ et $f_n\left(-\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{1+e^{-\frac{1}{n}}} - 1 = -\dfrac{e^{-\frac{1}{n}}}{1+e^{-\frac{1}{n}}} < 0$.
Or f_n est bijective, strictement croissante sur $\left[-\dfrac{1}{n}, 0\right]$.
Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0}$.

c) *En déduire la limite de la suite* (u_n) *:* Par application du théorème d'encadrement des limites, il est immédiat que $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0}$

d) *Montrons que* $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$ *:* On sait que $f_n(u_n) = 0$, donc $-\dfrac{1}{1+e^{u_n}} = nu_n$.
Sachant que $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, on a : $\lim\limits_{n\to\infty} e^{u_n} = 1$ et donc $\lim\limits_{n\to\infty} nu_n = -\dfrac{1}{2}$, soit $nu_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2}$
Conclusion : $\boxed{u_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}}$.

Fonctions Python permettant d'estimer la monotonie de la suite (u_n) :

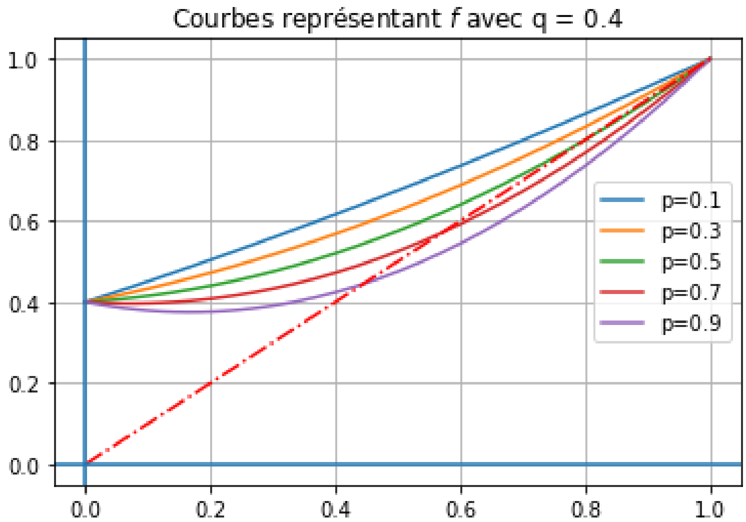
```
eps = 1e-3

f = lambda n,x:1/(1+np.exp(x))+n*x

def dichotomie(n,eps):
    # détermination de u_n à eps près avec a,b = -1/n,0
    a,b = -1/n,0 # initialisation de la dichotomie puisque -1/n < u_n < 0
    while b-a > eps:
       c = (a+b)/2
       if f(n,a)*f(n,c) <= 0:
          b = c
       else:
          a = c
    return c # v.a. de u_n

def suiteU(N):
    Lu = [] # Liste vide = initialisation de la liste des termes u_n
    for n in range(1,N+1): # termes de u_1 à u_N
       va = dichotomie(n,eps)
       Lu.append(va)
    return Lu
```

```
def graphe(N):
    A = suiteU(N)
    abs = np.arange(1,N+1)
    plt.plot(abs,A,'ro')
    plt.grid()
    plt.axvline();plt.axhline()
    plt.show()
    return A
```

Problème 2 : Correction à suivre...

Soient p et q deux réels compris strictement entre 0 et 1 tels que $p+q \leq 1$.
On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = q + (1-p-q)\,x + p\,x^2$, ainsi que la suite (v_n) définie par la donnée de $v_0 = 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = q + (1-p-q)\,v_n + p\,v_n^2$.

8. Écrire une fonction Python `traceCf(q)` d'argument un réel q compris strictement entre 0 et 1 qui affiche sur le même graphique cinq courbes représentatives de f pour p égal à 0.1 , 0.3 , 0.5, 0.7 et 0.9 et, comme sur la représentation ci-dessous, trace sur le même graphique et en pointillés, la droite d'équation $y = x$.



9. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \in [0,1]$.
10. Montrer que $f(x) = x$ ssi $x = 1$ ou $x = q/p$.
11. Si $q < p$, montrer la convergence de (v_n) et donner sa limite .(On pourra s'aider du graphique et de la droite d'équation $y = x$)
12. Que peut on dire dans le cas où q est supérieur ou égal à p ?
13. **Application... :** On s'intéresse à l'extinction d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant.
    L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :
    — soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité p ;
    — soit engendrer une seule bactérie avec une probabilité $1-p-q$;

— soit mourir et se désintégrer avec une probabilité q.

On appelle X_n la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la n-ième étape.
Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.
Pour tout entier naturel n, on note $U_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
Justifier que $\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_n = 0) = 1$, $\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_n = 0) = U_{n-1}$ et $\mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_n = 0) = U_{n-1}^2$.
En considérant un système complet d'événements lié à X_1 et en appliquant la formule des probabilités totales, montrer que la suite (U_n) correspond à la suite (v_n) étudiée précédemment. Quelle interprétation faire des résultats précédemment démontrés ?