# Devoir : Révisions d'analyse (1h30)

*Le devoir se compose d'un exercice et de deux sujets issus des oraux de l'agro.*
*A titre indicatif, on consacrera 30 m à chacun d'entre eux.*
*Il sera tenu compte de la présentation et en particulier de* $\boxed{\textit{l'encadrement}}$ *des résultats.*
*L'usage de la calculatrice* ***n'est pas*** *autorisé au cours de l'épreuve.*

### Exercice : Calculs rapides et méthodes usuelles

1. Donner la valeur des sommes suivantes :
$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3^k} \qquad \text{et} \qquad S_3 = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} \frac{1}{3^k}$$

2. Rappeler la formule de Pascal : $\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \cdots$

   *Application* : Montrer que $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$, $\forall 0 \leq p \leq n$

3. Soit $f$ la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x}}$.

   a) Préciser son ensemble de définition.

   b) Montrer que $\Omega = (-\frac{1}{2}, 0)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

   c) Déterminer l'équation de sa (ou ses) asymptote(s) en précisant leur position par rapport à la courbe.

4. Soit la fonction définie sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(1+2x)}{x} - 1 & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a) Donner le développement limité à l'ordre 1 de $f$ au voisinage de 0.

   b) La fonction $f$ est-elle continue sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ ? dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ ?

   c) Calculer sa dérivée en tout $x$ pour lequel cela a un sens.

   d) Montrer que $f$ est strictement monotone et tracer son tableau de variation.

## Problème 1 :

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit la fonction $f_n$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{1}{1+e^x} + nx$.
On appelle $(\mathcal{C}_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

5. a) Déterminer, pour tout réel $n$, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

   b) En déduire les variations de la fonction $f_n$.

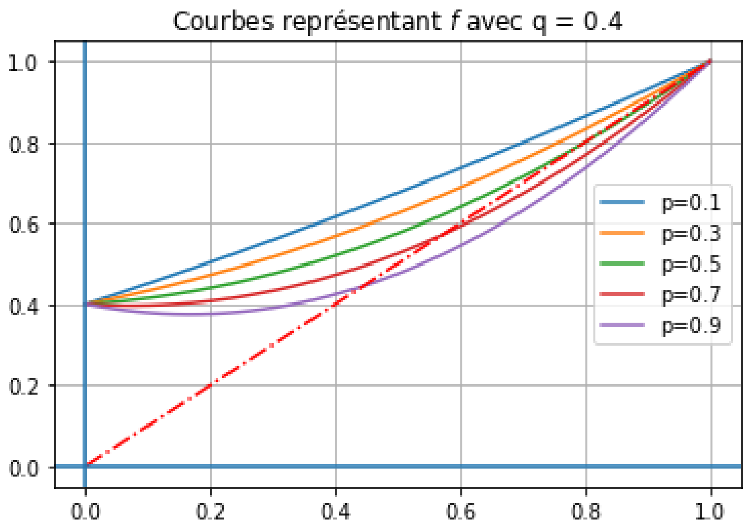
6. a) Déterminer les limites de $f_n$ aux bornes de son ensemble de définition.
   b) Déterminer les équations des droites asymptotes $(D_n)$, $(D'_n)$ en $+\infty$ et en $-\infty$ de $(\mathcal{C}_n)$.
   c) Donner l'équation de la tangente $(T_1)$ à la courbe $(\mathcal{C}_1)$ en $A_1$ puis tracer sur un même dessin les droites $(D_1)$, $(D'_1)$ et $(T_1)$ ainsi que l'allure de la courbe $(\mathcal{C}_1)$.

7. a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $u_n$.
   b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n} < u_n < 0$.
   c) En déduire la limite de la suite $(u_n)$.
   d) Écrire une fonction Python `dichotomie(f, n, eps)` (rappelé page 3) permettant d'obtenir une valeur approchée de $u_n$ à $\varepsilon$ près.
   e) En déduire une fonction `suiteU(N)` renvoyant la liste des $N$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ et permettant de valider le résultat obtenu en 7.c).
   f) Montrer ensuite que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n}$.

## Problème 2 :

Soient $p$ et $q$ deux réels compris strictement entre 0 et 1 tels que $p + q \leq 1$.
On considère la fonction $f$ définie sur $[0,1]$ par $f(x) = q + (1-p-q)\,x + p\,x^2$, ainsi que la suite $(v_n)$ définie par la donnée de $v_0 = 0$ et la relation $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_{n+1} = q + (1-p-q)\,v_n + p\,v_n^2$.

8. Écrire une fonction Python `traceCf(q)` d'argument un réel $q$ compris strictement entre 0 et 1 qui affiche sur le même graphique cinq courbes représentatives de $f$ pour $p$ égal à 0.1 , 0.3 , 0.5, 0.7 et 0.9 et, comme sur la représentation ci-dessous, trace sur le même graphique et en pointillés, la droite d'équation $y = x$.




9. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n \in [0,1]$.
10. Montrer que $f(x) = x$ ssi $x = 1$ ou $x = q/p$.
11. Si $q < p$, montrer la convergence de $(v_n)$ et donner sa limite .(On pourra s'aider du graphique et de la droite d'équation $y = x$)

12. Que peut on dire dans le cas où $q$ est supérieur ou égal à $p$ ?
13. **Application... :** On s'intéresse à l'extinction d'une population de bactéries procaryotes dans un écosystème donné répondant au modèle suivant.
L'évolution est supposée réalisée par étapes successives, suivant chacune le même fonctionnement ; à chaque étape donnée, chaque bactérie, indépendamment des autres peut :
    - soit donner lieu à une fission binaire, et se diviser en deux bactéries identiques indépendantes, ceci avec une probabilité $p$ ;
    - soit engendrer une seule bactérie avec une probabilité $1 - p - q$ ;
    - soit mourir et se désintégrer avec une probabilité $q$.

    On appelle $X_n$ la variable aléatoire égale au nombre de bactéries présentes après la $n$-ième étape.
Au départ, il n'y a qu'une seule bactérie dans l'écosystème, et on note $X_0 = 1$.
Pour tout entier naturel $n$, on note $U_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$.
Justifier que $\mathbb{P}_{(X_1=0)}(X_n = 0) = 1$, $\mathbb{P}_{(X_1=1)}(X_n = 0) = U_{n-1}$ et $\mathbb{P}_{(X_1=2)}(X_n = 0) = U_{n-1}^2$.
En considérant un système complet d'événements lié à $X_1$ et en appliquant la formule des probabilités totales, montrer que la suite $(U_n)$ correspond à la suite $(v_n)$ étudiée précédemment. Quelle interprétation faire des résultats précédemment démontrés ?

## Annexe : Rappel de l'algorithme de dichotomie

On considère une fonction $f$ continue sur un segment $[a, b]$.
On suppose que $f$ s'annule exactement une fois sur $[a, b]$ en un point que l'on note $\alpha$
On définit les suites $(a_k)_{k\geq 0}$ et $(b_k)_{k\geq 0}$ de la façon suivante :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- Pour tout entier naturel $k$ on note $c_k = \dfrac{a_k + b_k}{2}$.
si $f(a_k)f(c_k) \leq 0$, alors $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$
sinon $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$

On sait alors que les deux suites $(a_k)$ et $(b_k)$ convergent toutes les deux vers $\alpha$ en vérifiant :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k \leq \alpha \leq b_k \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}$$

On peut alors montrer que si l'entier $k$ est tel que $\dfrac{b-a}{2^k} \leq \varepsilon$, alors $a_k$ et $b_k$ sont des valeurs approchées à $\varepsilon$ près de $\alpha$.